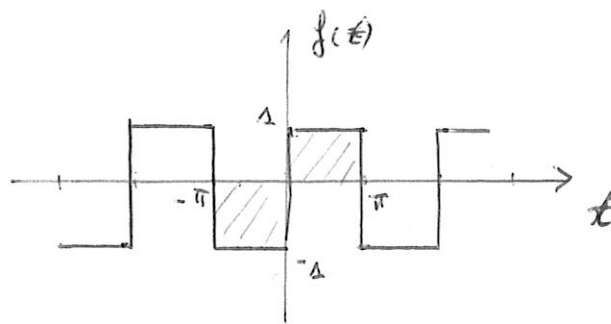


EXERCICE 1 :

(1)



$$1) \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \text{ici immédiat} \quad \frac{a_0}{2} = 0$$

$$2) \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

↑ ↑
fonction impaire fonction paire

on a donc ici l'intégrale sur 1 période d'une fonction impaire $\rightarrow a_n = 0$

$$3) \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$
$$= \frac{2}{T_0} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\pi} \sin(n\omega_0 t) dt$$

en changeant $t \rightarrow -t$
 $dt \rightarrow -dt$
 $\sin(n\omega_0 t) \rightarrow -\sin(n\omega_0 t)$

$$\rightarrow b_n = \frac{2}{T_0} \int_{\pi}^0 -\sin(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\pi} \sin(n\omega_0 t) dt$$

en changeant les bornes de l'intégrale

$$b_n = \frac{2}{T_0} \times 2 \int_0^{\pi} \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T_0} \times (-1) \times \frac{1}{n} \times \frac{T_0}{2\pi} \left[\cos(n\omega_0 t) \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{n} \times \left[\cos(n\omega_0 t) \right]_0^{\pi}$$

si n est pair ($n = 2p$) $\rightarrow \cos(n\omega_0 \pi) = 1 \rightarrow b_n = 0$

(2)

si n est impair ($n = 2p+1$) $\rightarrow \cos(n\omega_0 \pi) = -1$

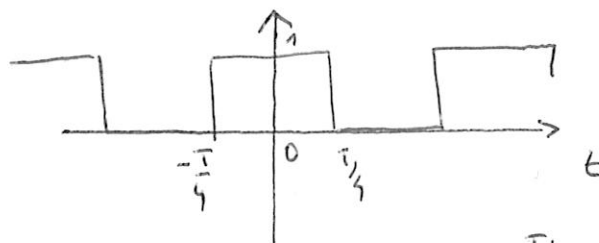
donc

$$b_n = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{(2p+1)}$$

on a alors le développement en série de Fourier suivant

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)} \sin((2p+1)\omega_0 t)$$

4) on considère maintenant la fonction paire suivante :



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= + \frac{2}{T} \times \frac{1}{n} \times \frac{T}{2\pi} \left[\sin(n\omega_0 t) \right]_{-T/4}^{T/4} = + \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{n} \left(\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= + \frac{2}{\pi \cdot n} \sin\left(n \times \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Si n est pair $\rightarrow \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow a_n = 0$ donc pas de termes d'ordre pair dans le développement

si n est impair $a_n \neq 0$

et on a bien

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k \cdot \frac{\pi}{2}} \cos(k\omega_0 t)$$

en effet

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} dt = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2

$$S_1 = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1}$$

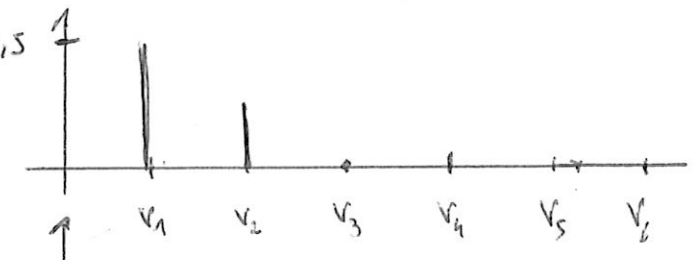
$$S_2 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1}$$

① valeurs des coefficients :

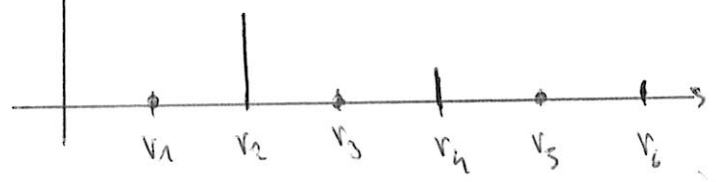
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
S_1	$1/2$	$-2/3\pi$	0	$-\frac{2}{15\pi}$	0	$-\frac{2}{35\pi}$
S_2	0	$-\frac{4}{3\pi}$	0	$-\frac{4}{15\pi}$	0	$-\frac{4}{35\pi}$

② spectres de Fourier :

pour S_1 :

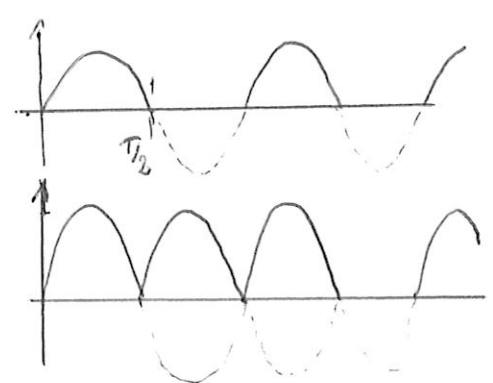


pour S_2



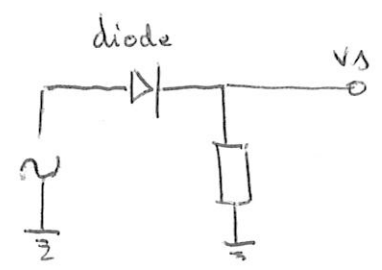
remarque : on retrouve ici pour S_2 le fait qu'on ait un signal périodique de fréquence $T \hat{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot T$ avec $T = \frac{1}{v_2} \Rightarrow v_2$ joue le rôle de la fréquence fondamentale.

3) représentation graphique des fonctions : S_1



S_1 : redressement simple alternance

S_2 : redressement double alternance.



4) valeurs moyennes : pour S_1 : $\langle S_1 \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}$

pour S_2 : $\langle S_2 \rangle = \frac{2}{\pi}$

5) calcul de a_1 pour le signal S_1

$S_1(t) = \sin(\omega t)$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t \times \cos \omega t dt$$

$$= \frac{2}{T} \times \frac{1}{2} \int_0^{T/2} \sin(2\omega t) dt = \frac{1}{T} \times \frac{1}{2} \times \frac{T}{2\pi} \left[\cos(2\omega t) \right]_0^{T/2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \times \left[\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) - 1 \right] = 0$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2(\omega t) dt$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{2}{T} \left(\frac{1}{2} \int_0^{T/2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{T/2} \cos(2\omega t) dt \right)$$

$$= \frac{2}{T} \times \frac{1}{2} \times \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\omega} \left[\sin 2\omega t \right]_0^{T/2}$$

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2}}$$

EXERCICE 3 : soit la fonction 2π périodique telle que

pour $x \in [-\pi; \pi]$: $f(x) = x^2$

1) calcul de terme constant :

$$\Delta \text{ car } a_0 = \frac{1}{T} \int f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

et $f(x) = a_0 + \sum \dots$

2) développement en série de Fourier : la fonction $f(x)$ étant paire

$$\rightarrow b_n = 0 \quad \forall n.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

remarque : ici $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$

intégration par parties :

$$\int_0^{\pi} u(x) v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x) v(x) dx$$

on pose ici $u(x) = x^2$ $u'(x) = 2x$
 $v'(x) = \cos(nx)$ $v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$\text{donc } a_n = \frac{1}{n \cdot \pi} \left[\underbrace{x^2 \cdot \sin(nx)}_0 \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n \cdot \pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$$

- calcul de $\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$ on pose $u(x) = x$ $u'(x) = 1$
 $v'(x) = \sin(nx)$ $v(x) = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx &= - \left[\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= - \frac{\pi}{n} (\cos(n\pi) - 1) + \frac{1}{n} \left[\sin(nx) \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{donc } a_n = - \frac{2}{n \cdot \pi} \times - \frac{\pi}{n} \times \{ \cos(n\pi) - 1 \}$$

$$= + \frac{2}{n^2} \{ \cos(n\pi) - 1 \}$$

si n est pair $\rightarrow a_n = 0$

si n est impair $\cos(n\pi) - 1 = -2$

$$\hookrightarrow a_n = \frac{-4}{n^2}$$

on peut donc résumer par

$$a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

3) Sachant que $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ avec $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$

on fait $x = \pi \rightarrow f(x) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Si on fait $x = 0$ on obtient $f(x) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = +\frac{\pi^2}{12}$

pour obtenir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ on utilise l'égalité de Parseval :

$$\|f\|_{\pi}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

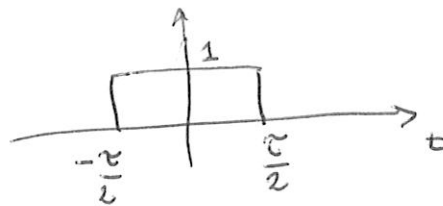
on a alors $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$

d'où $\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{5} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

EXERCICE 4 : Soit la fonction porte

①

$\Pi_{\tau}(t) = 1$ pour $-1 \leq t \leq 1$
 $= 0$ sinon

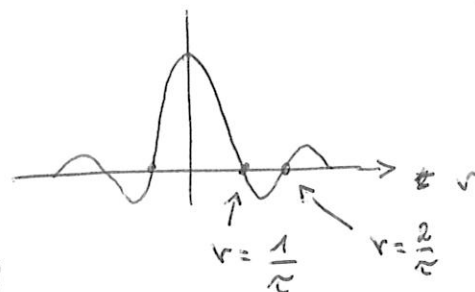


$$\begin{aligned} \text{TF}[\Pi_{\tau}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t) e^{-2i\pi vt} dt = 2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Pi_{\tau}(t) \cos(2\pi vt) dt \\ &= 2 \times \int_0^{\tau/2} \cos(2\pi vt) dt \end{aligned}$$

donc $\text{TF}[\Pi_{\tau}(t)] = \frac{2}{2\pi v} \left[\sin(2\pi vt) \right]_0^{\tau/2} \Rightarrow \text{TF}[\Pi_{\tau}(t)] = \tau \times \text{sinc}(\pi v \tau)$

on a alors

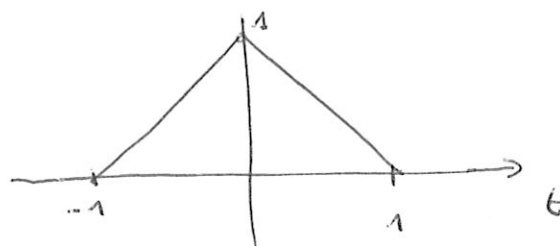
$$TF[\Pi_{\tau}(t)] = \tau \times \frac{\sin(\pi \nu \tau)}{\pi \nu \tau}$$



(2) Soit la fonction $\Lambda(t) = 1 - |t|$ pour $t \in [-1, 1]$

2.1) $= 0$ si $t \notin [-1, 1]$

représentation graphique de $\Lambda(t)$:

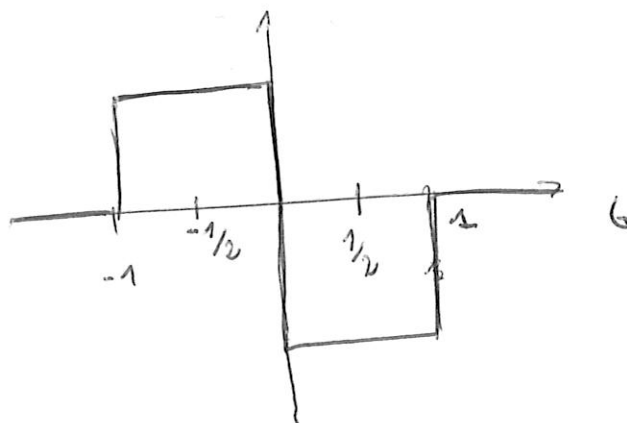


$$\Lambda(t) = 1 + t \quad \text{pour } t \in [-1; 0]$$

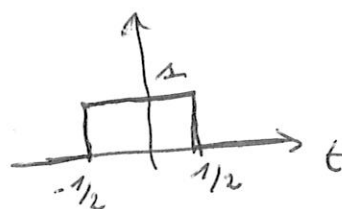
$$= 1 - t \quad \text{pour } t \in [0; 1]$$

donc $\Lambda'(t) = 1$ pour $t \in [-1; 0]$

$$= -1 \quad \text{pour } t \in [0; 1]$$



considérons la fonction porte suivante:



fonction porte de largeur 1.

on remarque alors que $\Lambda'(t) = \Pi(t + \frac{1}{2}) - \Pi(t - \frac{1}{2})$

2.2)
d'où $TF[\Lambda'(t)] = TF[\Pi(t + \frac{1}{2})] - TF[\Pi(t - \frac{1}{2})]$

rappel: propriété de translation de la fonction :

$$TF[f(t-t_0)] = e^{-2i\pi r t_0} TF[f]$$

$$TF[f(t+t_0)] = e^{2i\pi r t_0} TF[f]$$

$$\begin{aligned} \text{on a alors } TF[\Lambda'(t)] &= e^{i\pi r} TF[\Pi(t)] - e^{-i\pi r} TF[\Pi(t)] \\ &= 2i \sin \pi r \times TF[\Pi(t)] \end{aligned}$$

$$\text{or } TF[\Pi(t)] = \frac{\sin \pi r}{\pi r}$$

$$\Rightarrow TF[\Lambda'(t)] = 2i \frac{\sin^2 \pi r}{\pi r}$$

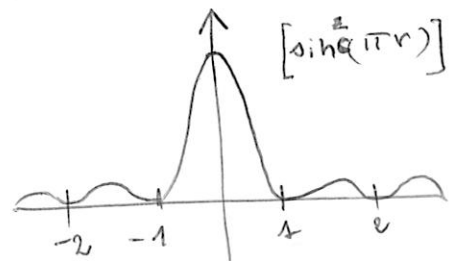
rappel: propriété de la TF d'une dérivée de fonction :

$$TF[f'(t)] = 2i\pi r \times TF[f(t)]$$

$$\text{on en déduit alors } \frac{2i\pi r TF[\Lambda(t)]}{TF[\Lambda'(t)]} = 2i \frac{\sin^2 \pi r}{\pi r}$$

d'où

$$TF[\Lambda(t)] = \frac{\sin^2 \pi r}{(\pi r)^2}$$



2-3: calcul direct de la TF: $\Lambda(t)$ est paire

$$TF[\Lambda(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t) e^{-2i\pi r t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \Lambda(t) e^{-2i\pi r t} dt \cos(2\pi r t)$$

$$TF[\Lambda(t)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1-t) \cos(2\pi r t) dt$$

on intègre par parties: on pose $u = 1-t$ $u' = -1$
 $v' = \cos 2\pi r t$ $v = \frac{1}{2\pi r} \sin(2\pi r t)$

$$TF[\Lambda(t)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[(1-t) \times \frac{\sin(2\pi r t)}{2\pi r} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin 2\pi r t}{2\pi r} dt \right\}$$

donc $TF[\Lambda(t)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 0 + (-) \frac{1}{(2\pi V)^2} \left[\cos 2\pi V t \right]_0^1 \right\}$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{4\pi^2 V^2} (1 - \cos 2\pi V) \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{4\pi^2 V^2} (1 - 2\cos^2 \pi V + 1) \right]$$

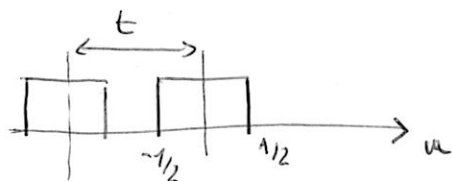
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4}{4\pi^2 V^2} (1 - \cos^2 \pi V) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\pi^2 V^2} \times \sin^2(\pi V)$$

d'aut $TF[\Lambda(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin^2(\pi V)$

2.4 : calcul de $\Pi(t) \otimes \Pi(t)$: rappel produit de convolution

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) g(u) du$$

i) $t < -1$

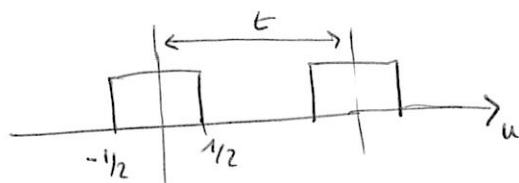


$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du$$

$\uparrow$
 $g(t-u)$ décalée de t .

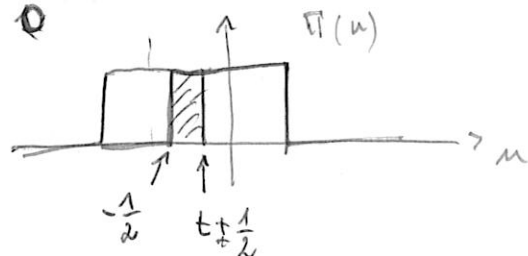
on a $\Pi(u) * \Pi(t-u) = 0$

ii) $t > 1$



on a encore $\Pi(u) * \Pi(t-u) = 0$

iii) $-1 < t < 0$



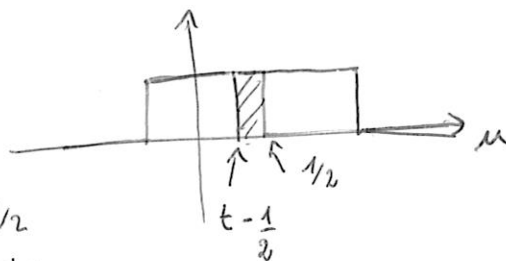
$$\Pi(t) * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(u) \cdot \Pi(t-u) du$$

$$= \int_{-1/2}^{t+1/2} du$$

$$= [u]_{-1/2}^{t+1/2}$$

d'aut $\Pi(t) * \Pi(t) = t$

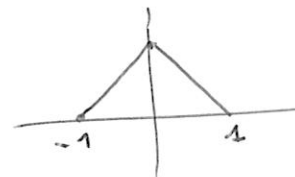
iv) pour $0 < t < 1$



$$\text{on a alors } \Pi(t) \otimes \Pi(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} du$$

$$= \left[u \right]_{t-1/2}^{1/2} = 1/2 - t + \frac{1}{2} = 1 - t$$

on a alors pour $t \in [-1; 1]$ $\Pi(t) * \Pi(t) =$



$$= \Lambda(t)$$

③ transformée de Fourier d'une Gaussienne

soit la fonction $G(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$\text{TF}[G(t)] = \tilde{G}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2i\pi vt} dt$$

$$\frac{d}{dv} \tilde{G}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} (-2i\pi t) e^{-2i\pi vt} dt$$

$$= \frac{2i\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-t)}_{u'} e^{-\frac{t^2}{2}} \underbrace{e^{-2i\pi vt}}_v dt$$

intégration par parties :

$$\frac{d}{dv} \tilde{G}(v) = \frac{2i\pi}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \underbrace{\left[e^{-2i\pi vt} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} (-2i\pi v) e^{-2i\pi vt} dt \right.$$

$$= (-1) \cdot \frac{4\pi^2 v}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2i\pi vt} dt$$

$$\frac{d}{dv} \tilde{G}(v) = -4\pi^2 v \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2i\pi vt} dt}_{\tilde{G}(v)}$$

3.2) On a donc $\frac{\tilde{G}'(v)}{\tilde{G}(v)} = -4\pi^2 v$

d'où $\tilde{G}(v) = K e^{-2\pi^2 v^2}$

où la constante K est obtenue en faisant $v=0$

$$\rightarrow \tilde{G}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

rappel: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

fonction Γ d'Euler

$$\Gamma: z \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

si on pose $u = \sqrt{t} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

donc $dt = 2 du$

d'où $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$

on a donc $\text{TF}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = e^{-2\pi^2 v^2}$

autre écriture (avec $\omega = 2\pi v$) $\text{TF}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

REMARQUE: expression plus générale

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

↑

écart type

$$\text{LMH} = 2\sqrt{2\ln 2} \cdot \sigma = 2,35 \cdot \sigma$$

retrouver la relation entre largeur à mi-hauteur et σ .

3.3 : en utilisant la propriété de changement d'échelle: $t \rightarrow \sqrt{\alpha} \cdot t$

8

$$\text{TF} \left[G(\sqrt{\alpha} \cdot t) \right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{G}\left(\frac{v}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

on a donc $\text{TF} \left[e^{-\alpha \frac{t^2}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{2\pi^2 v^2}{\alpha}}$

en posant $\sigma^2 = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \text{TF} \left[e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right] = \sigma e^{-2\pi^2 \sigma^2 v^2}$