

# Étude de fonctions - Exercices

Décembre 2019

## Exercice 1

Dans chaque cas :

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$
- Trouver la fonction dérivée  $f'$
- Résoudre l'équation  $f'(x) = 0$
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$
- Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$

1.  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{3x}$
2.  $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 5x + 4)^2}$
3.  $f(x) = \frac{(5x-1)^3}{x^2}$

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; \pi]$  par :  $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$

1. Démontrer que  $\forall x \in [0; \pi]$  on a  $f'(x) = \sin(x)(2 \cos(x) - 1)$
2. Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'équation  $f'(x) = 0$
3. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; \pi]$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

## Exercice 3

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (x^2 - 4x + 1)e^x$ . On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,2 cm en ordonnées)

1. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$
2. Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer la dérivée  $g'$  de  $g$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
5. Tracer la courbe  $C$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

#### Exercice 4

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $h(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ . On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer la limite de  $h$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  puis interpréter graphiquement ces résultats.
2. Déterminer :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} h(x)$ . Interpréter ces résultats.
3. Déterminer la dérivée  $h'$  de  $h$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $h$ .
5. Tracer la courbe  $C$  ainsi que ses asymptotes dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$ . On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter le résultat.
2. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Tracer la courbe  $C$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Exercice 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Démontrer que  $\forall x \in [0; +\infty[$  on a  $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
4. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ 
  - (a) Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
  - (b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est bornée.
  - (c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$