

**L1 Maths-Info Parcours Accompagné 2019-2020 - Remédiation en Mathématiques**  
**/ I. Dubois**

**Test d'évaluation - Durée 1h15 - CORRECTION**

**Exercice 1 - Calcul et simplification d'une fraction**

Calculer et simplifier au maximum le nombre suivant :  $A = 4 - \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$

*Solution :*

$$A = 4 - \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{1}{\frac{4+1}{2}}} = 4 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{\frac{5}{2}}} = 4 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}} = 4 - \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = 4 - \frac{15}{4} = \frac{16-15}{4} = \frac{1}{4}.$$

**Exercice 2 - Calcul et simplification avec des puissances**

Ecrire sous la forme d'une seule puissance de deux le nombre suivant :

$$B = 8^5 \times \left(\frac{1}{16}\right)^{-3} \times 2^{-2} \times \frac{1}{4^n}$$

( $n$  est un entier naturel)

*Solution :*

$$B = 8^5 \times \left(\frac{1}{16}\right)^{-3} \times 2^{-2} \times \frac{1}{4^n} = (2^3)^5 \times (2^{-4})^{-3} \times 2^{-2} \times \frac{1}{(2^2)^n} = 2^{15} \times 2^{12} \times 2^{-2} \times 2^{-2n} = 2^{25-2n}.$$

**Exercice 3 - Calcul et simplification avec des racines carrées**

Calculer et simplifier au maximum le nombre suivant :  $C = (\sqrt{2 - \sqrt{3}}) \times (\sqrt{2 + \sqrt{3}})$

*Solution :*

$$C = (\sqrt{2 - \sqrt{3}}) \times (\sqrt{2 + \sqrt{3}}) = \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1.$$

**Exercice 4 - Expression algébrique - Simplification**

Simplifier l'expression suivante :  $D = 1 - [1 - (1 - a)] - [1 - (1 - b)] - [1 - (b - a)]$

*Solution :*

$$D = 1 - [1 - (1 - a)] - [1 - (1 - b)] - [1 - (b - a)] = 1 - (a) - (b) - (1 - b + a) = 1 - a - b - 1 + b - a = -2a.$$

**Exercice 5 - Expression algébrique - Substitution**

Soit la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ .

Pour  $x$  réel quelconque, déterminer en simplifiant l'expression obtenue :

1)  $f(-x)$       2)  $f(2x)$       3)  $f\left(\frac{x}{2}\right)$

*Solution :*

$$\begin{aligned} 1) f(-x) &= 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1. \\ 2) f(2x) &= 2(2x)^2 - 3(2x) + 1 = 8x^2 - 6x + 1. \\ 3) f\left(\frac{x}{2}\right) &= 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \frac{2}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1. \end{aligned}$$

**Exercice 6 - Equations du premier degré**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes, d'inconnue  $x$  :

$$1) 3x - a = 1 + 2a, \text{ avec } a \text{ un paramètre réel fixé} \quad 2) 3 - 2x = -\frac{x}{3}$$

*Solution :*

$$1) 3x - a = 1 + 2a \Leftrightarrow 3x = 1 + 2a + a \Leftrightarrow 3x = 1 + 3a \Leftrightarrow x = \frac{1 + 3a}{3} = \frac{1}{3} + a$$

$$2) 3 - 2x = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow 2x - \frac{x}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{6 - 1}{3}x = 3 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = 3 \Leftrightarrow x = 3 \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

### Exercice 7 - Inégalités et opérations dans $\mathbb{R}$

Sachant que  $-2 < x \leq -1$  et que  $1 \leq y < 3$ , donner un encadrement de :

$$1) x - y \quad 2) xy$$

*Solution :*

1) On a  $-2 < x \leq -1$  et  $-3 < -y \leq -1$ . D'où :  $-5 < x - y \leq -2$ .

2) On a :  $1 \leq y$  donc  $y$  est positif. Ainsi, on peut multiplier par  $y$  des inégalités sans en changer le sens.

Puisque  $-2 < x \leq -1$ , alors  $-2y < xy \leq -y$ .

De plus,  $-y \leq -1$  (car  $1 \leq y$ ) et  $-2y > -6$  (car  $y < 3$ ). On en déduit donc :  $-6 < xy \leq -1$ .

### Exercice 8 - Inéquation du premier degré

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $6x - \frac{x+1}{2} < 1 - 2x$

*Solution :*

$$6x - \frac{x+1}{2} < 1 - 2x \Leftrightarrow (6 - \frac{1}{2} + 2)x < \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{12 - 1 + 4}{2}x < \frac{1 + 2}{2} \Leftrightarrow \frac{15}{2}x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 15x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{15} \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$$

### Exercice 9 - Equation se ramenant à une équation du second degré

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $x(x+2) = 3 - (x-1)(x-2)$

*Solution :*

$$x(x+2) = 3 - (x-1)(x-2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 - (x^2 - x - 2x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1 - x^2 + 3x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Calculons le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9. \text{ On a donc } \Delta > 0 \text{ et } \sqrt{\Delta} = 3.$$

$$\text{Il y a ainsi deux solutions : } x_1 = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+3}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

### Exercice 10 - Inéquation du second degré

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$

*Solution :*

Calculons le discriminant du polynôme du second degré  $-x^2 + 4x - 4$ .

On a :  $\Delta = (4^2) - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$ . Ainsi, c'est un polynôme ayant une racine double égale à  $x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$ .

De plus le coefficient de  $x^2$  est  $-1$  est négatif.

On est donc dans la situation où le polynôme est toujours négatif, et s'annule seulement en  $x_0$ .

On a donc :  $-x^2 + 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Remarque :

On aurait pu écrire plus directement :

$$-x^2 + 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (un carré est toujours positif ou nul)}$$