

**UE 111 Fondements Mathématiques -
Examen (17/01/2020, durée : 2 heures)**

Documents et instruments électroniques interdits.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

La lisibilité de la copie et la qualité de la rédaction sont des éléments essentiels dans l'appréciation générale.

Merci d'indiquer votre groupe de TD sur votre copie :

EI 1 (Mme. Geandier);

EI 2 (M. Maubon);

EI 3 (M. Bertram);

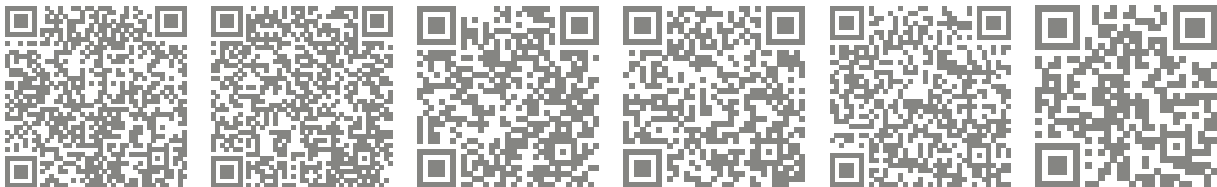
EI 4 (M. Cadorel);

CPU (Mme. Kowalska);

MP (M. Mégy).

* * *

Préambule. Nous nous associons pleinement aux actions menées hier, jeudi 16 janvier 2020, à la Faculté des Sciences de Vandœuvre. Face à la destruction annoncée du service public et des acquis sociaux construits en France d'après-guerre, vous avez le choix de laisser faire sans protestation, ou de vous faire entendre. Nos collègues ont choisi de se faire entendre. Bientôt, le choix sera à vous. Informez-vous, regardez ce qui se passe dans ce pays.



Nous vous souhaitons une pleine réussite de vos études de L1.

Le sujet qui suit est le sujet initialement prévu pour cette épreuve.

* * *

Exercice 1.

1. Calculer les coefficients $\binom{7}{k}$ pour $k = 1, \dots, 7$.
2. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ est un multiple de 7.

Exercice 2. Soit M un ensemble et A, B, C des parties de M . Montrer :
si $A \subset C$, alors $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Exercice 3. Montrer que tout entier n supérieur ou égal à huit s'écrit sous la forme $3a + 5b$, avec a et b entiers naturels.

(Indication : commencer par les cas $n = 8, 9, 10$.)

Exercice 4. Montrer par récurrence :

1. pour tout $n \geq 1 : 2^n \geq n$,
2. pour tout $n \geq 4 : 2^n \geq n^2$.

Existe-t-il un $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \geq n^3$ pour tout $n \geq N$?

Exercice 5. Rappel de notation : $[[1, n]] = \{1, \dots, n\}$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. On suppose que $c \geq b$.

1. A quelle condition sur a, b, c existe-t-il des bijections $[[0, a]] \longrightarrow [[b, c]]$?
2. On suppose à présent $c = a^2 + b$. Montrer que l'application

$$f : [[0, a]] \longrightarrow [[b, c]], \quad x \mapsto x^2 + b$$

est bien définie, et montrer qu'elle est injective.

3. Toujours en supposant $c = a^2 + b$, à quelle condition f est-elle surjective ? Donner un exemple pour lequel cela n'est pas le cas.

Exercice 6. Soit M l'ensemble de toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pour les relations R suivantes, définies dans M , étudier s'il s'agit d'une relation d'équivalence, d'une relation d'ordre ou ni l'un ni l'autre :

1. $f R g$ si $\forall x \in \mathbb{N} : f(x) \leq g(x)$
2. $f R g$ si $\exists x \in \mathbb{N} : f(x) \leq g(x)$
3. $f R g$ si $f(0) = g(0)$
4. $f R g$ si $\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = g(x)$
5. $f R g$ si $f(0) \leq g(0)$ et $\forall x \geq 1 : f(x) = g(x)$