

ANNEXE : SPECTROMETRIE PAR TRANSFORMEE DE FOURIER

I.	INTERFERENCES A DEUX ONDES	1
II.	CAS D'UN DOUBLET.....	2
III.	CAS D'UNE SOURCE DE « GRANDE LARGEUR » SPECTRALE.....	4
IV.	CAS GENERAL.....	6

On utilise pour cela différents types de spectromètres mais, pour le montage qui nous intéresse nous allons décrire le cas de l'étude du spectre d'une source de lumière, par transformée de Fourier, à l'aide d'un Interféromètre de Michelson.

I. INTERFERENCES A DEUX ONDES

On a vu dans le cours sur les interférences à deux ondes que l'éclairement (ou « intensité lumineuse ») mesuré en un point M du champ d'interférence, i.e. sur un écran éclairé par les ondes issues de deux sources monochromatiques, est :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1(M) \cdot I_2(M)} \langle \cos \varphi \rangle_t \quad [1]$$

Si $\langle \cos \varphi \rangle_t = 0$: les sources sont incohérentes et on somme simplement les éclairement (intensités) des deux sources

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) \quad [2]$$

Si $\langle \cos \varphi \rangle_t = \cos \varphi$ la phase est indépendante du temps, les sources sont dites cohérentes.

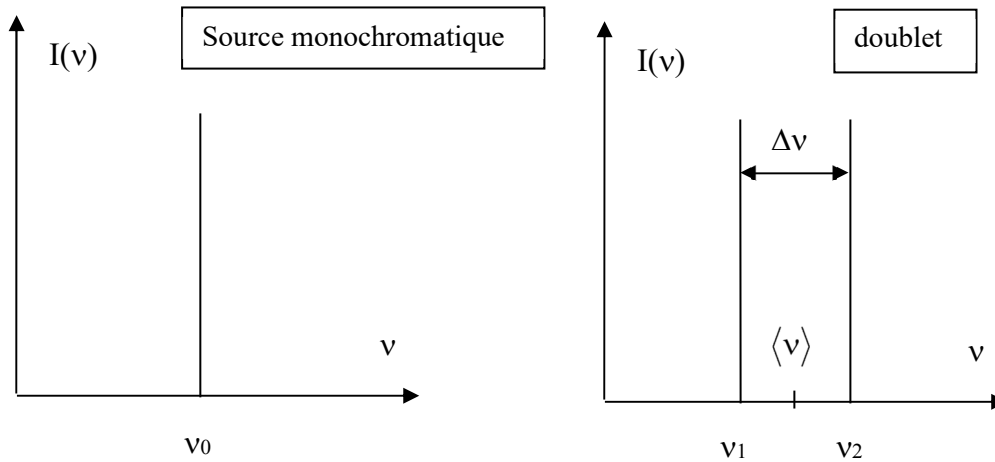
Dans le cas de sources cohérentes, l'intensité en M s'écrit comme en [1]. Si on étudie le cas particulier où : $I_1(M) = I_2(M) = I_0$ alors :

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos \varphi) \quad \text{avec :} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad [3]$$

δ la différence de marche¹

¹ Dans le cas général, la d.d.m. $[\delta]$ est fonction de la position relative du point d'observation M et des sources. Pour un interféromètre de Michelson, ce sont les différences de longueurs des deux bras qui donneront δ .

Ceci n'est valable que pour une source monochromatique, c'est à dire une source dont le spectre $I(\nu)$ ne « présente » qu'une « raie » « parfaitement » monochromatique à la fréquence ν_0 (t.q. $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$).



II. CAS D'UN DOUBLET

Certaines sources de lumière présentent une structure particulière, dans leur spectre d'émission, appelée doublet : c'est le cas du sodium (Na) et du mercure (Hg), entre autres. On caractérise ce doublet (ν_1, ν_2) par sa valeur moyenne $\nu_0 = \langle \nu \rangle = \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right)$ et par sa « largeur » $\Delta \nu = (\nu_2 - \nu_1)$, espacement entre les raies.

L'émission de lumière étant, sauf cas particulier, un phénomène aléatoire, on traite les deux « raies », aux fréquences (ν_1, ν_2), comme des sources indépendantes (donc incohérentes). Chacune des « raies » apporte alors sa contribution à l'intensité mesurée au point M, comme pour [2].

$$\begin{aligned} I(\nu_1, M) &= 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) & \text{avec :} & \quad \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} \\ I(\nu_2, M) &= 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_2} \delta \right) & \text{avec :} & \quad \lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} \end{aligned} \quad [3]$$

$$\begin{aligned} \text{On note :} \quad p &= \frac{2\pi\delta}{c} \nu_1 \quad q = \frac{2\pi\delta}{c} \nu_2 \quad \frac{p+q}{2} = \frac{2\pi\delta}{c} \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2} = \frac{2\pi\delta}{c} \langle \nu \rangle \\ \frac{p-q}{2} &= \frac{2\pi\delta}{c} \frac{(\nu_1 - \nu_2)}{2} = -\frac{\pi\delta}{c} \Delta \nu & \text{rappel :} & \quad \cos(-x) = \cos x \end{aligned}$$

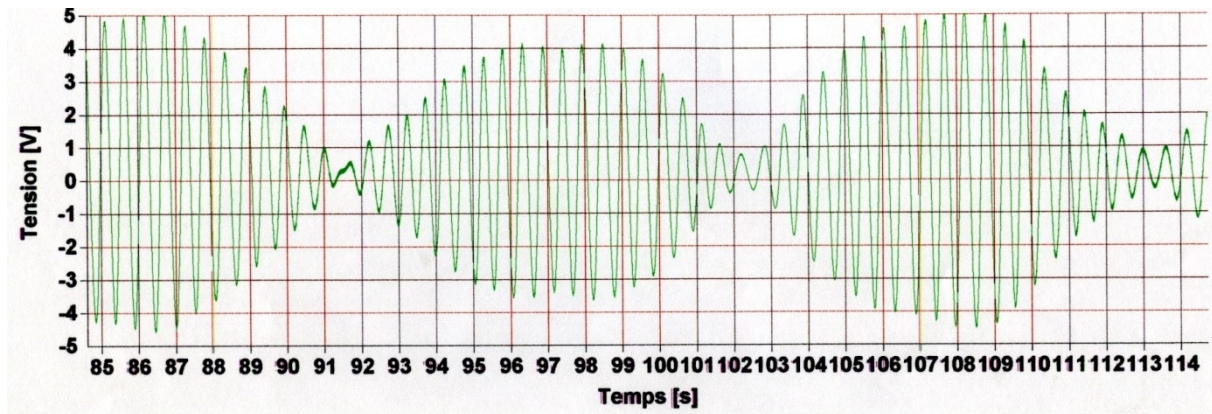
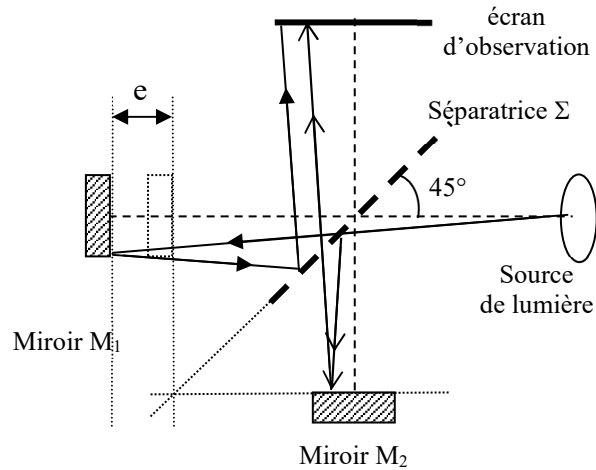
Remarque : δ est fonction de la longueur des bras qui peut varier.

$$\begin{aligned}
 I(M) &= I(v_1, M) + I(v_2, M) = 2I_0(2 + \cos p + \cos q) \\
 &= 4I_0 \left[1 + \cos \frac{(p+q)}{2} \cos \frac{(p-q)}{2} \right] \\
 I(M) &= 4I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta}{c} \langle v \rangle \cos \frac{\pi\delta}{c} \Delta v \right] \quad [4]
 \end{aligned}$$

En augmentant (ou en diminuant) à vitesse constante la longueur d'un des deux bras, on fait varier δ et par conséquent $I(M)$ va varier avec les termes en $\cos \delta$.

Le terme en $\cos \frac{2\pi\delta}{c} \langle v \rangle$ varie rapidement entre $[+1, -1]$ alors que le terme en $\cos \frac{\pi\delta}{c} \Delta v$ varie lentement entre $[+1, -1]$.

On obtient donc une courbe $I(M) = f(t)$ de la forme suivante, par exemple :



Enregistrement à partir du doublet du Césium.

Cas particulier : $\cos \frac{\pi\delta}{c} \Delta v = 0$ dans ce cas, $I(M) = 4 I_0$

Ceci se produit pour des valeurs précises de δ (les « anticoïncidences »).

Dans le cas d'un Michelson réglé en « lame d'air » (franges d'égales inclinaison ou franges de Haidinger), la différence de marche entre les deux bras est : $\delta = 2e$

Sachant que $\cos x = 0 \Rightarrow x = (k+1/2)\pi$ avec k entier, les valeurs de δ vérifiant $\cos \frac{\pi\delta}{c} \Delta v = 0$ sont :

$$\delta_k = 2e_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{\Delta v}$$

et l'écart entre deux « zéro » consécutifs, Δe , est tel que :

$$2\Delta e = \frac{c}{\Delta \nu}$$

Si on peut mesurer Δe avec précision, on obtient alors $\Delta \nu$ directement.

Lorsque e varie, la d.d.m. δ varie de $(\Delta \delta)$, et lorsque $I(M)$ passe d'un zéro (de visibilité) à l'autre, on « voit » défiler N franges d'interférences (« anneaux ») entre deux « zéro ». A chacune de ces franges correspond une variation de phase de 2π (ou de d.d.m. $= \lambda$). Donc, pour N franges, entre deux « zéro », on trouve :

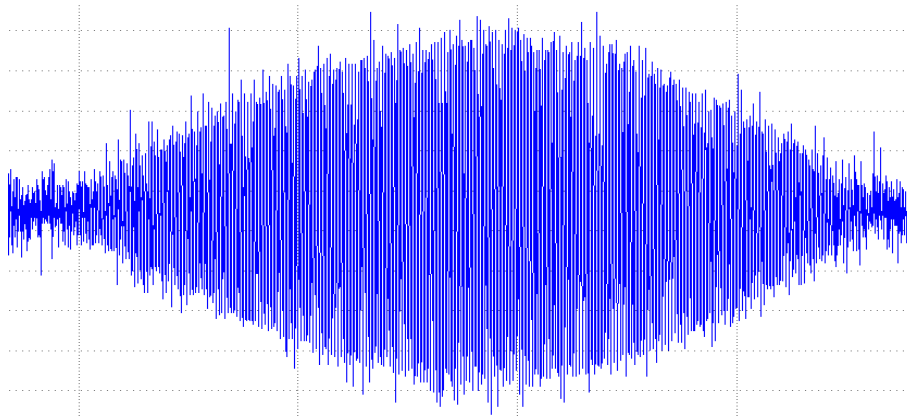
$$N 2\pi = \frac{2\pi(\Delta \delta)}{c} \langle \nu \rangle \quad \text{avec une variation de la d.d.m.} \quad \Delta \delta = 2\Delta e = \frac{c}{\Delta \nu}$$

On en déduit² la valeur de N :

$$N = \frac{\langle \nu \rangle}{\Delta \nu} = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}$$

A.N. : Le doublet jaune du sodium est caractérisé par : $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$ et $\Delta \lambda \approx 0,6 \text{ nm}$ et donc $N \approx 986$!

Le doublet jaune du mercure est caractérisé par : $\lambda_0 = 578 \text{ nm}$ et $\Delta \lambda \approx 2,06 \text{ nm}$ et donc $N \approx 280$. On trouve une représentation $I = f(e)$ de ce doublet ci-dessous.



On peut « facilement » enregistrer ce spectre avec une photodiode et un enregistreur « graphique » : table traçante ou mieux encore un oscilloscope à mémoire (mode Roll) ou une carte d'acquisition (SysamSP5+Latis pro). On compte (voir aussi CALIENS) le nombre d'anneaux N qui ont défilé et on en déduit $\Delta \lambda$, connaissant $\langle \lambda \rangle$.

III. CAS D'UNE SOURCE DE « GRANDE LARGEUR » SPECTRALE

On peut travailler avec un spectre simplifié tel que :

- $I(\nu) = I^* = \text{constante}$ pour $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$
- $I(\nu) = 0$ en dehors du domaine $[\nu_1, \nu_2]$.

$$dI(M, \nu) = 2 dI_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta}{c} \nu \right) \right) \quad \text{avec } dI_0 = \frac{I^*}{\Delta \nu} d\nu$$

² Pour passer de ν en λ , on peut prendre l'expression de la différentielle de $\lambda = \frac{c}{\nu}$, soit :

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$$

$$dI(M, \nu) = \frac{2I^*}{\Delta\nu} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c}\nu\right) \right) d\nu$$

$$I(M) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} dI(M, \nu) = \frac{2I^*}{\Delta\nu} \left\{ \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu + \int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos(b\nu) d\nu \right\} \quad \text{avec } b = \frac{2\pi}{c}\delta$$

On remarque que $\int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos(b\nu) d\nu = \frac{1}{b} [\sin(b\nu_2) - \sin(b\nu_1)]$ puis, avec $p = b\nu_2$ et $q = b\nu_1$

On trouve $= \frac{2}{b} \left[\sin \frac{b}{2} (\nu_2 - \nu_1) \cos b \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \right]$

$$I(M) = 2I^* \left\{ 1 + \left[\frac{\sin\left(\frac{b}{2}\Delta\nu\right)}{\frac{b}{2}\Delta\nu} \cos \frac{2\pi}{c}\delta\nu_0 \right] \right\} \quad \text{avec } \sin_c(x) = \frac{\sin x}{x}$$

On trouve : $I(M) = 2I^* \left\{ 1 + \left[\sin_c\left(\frac{b}{2}\Delta\nu\right) \cos \frac{2\pi}{c}\delta\nu_0 \right] \right\}$

Le terme en $\sin_c\left(\frac{b}{2}\Delta\nu\right)$ correspond à une modulation lente et décroissante de l'intensité lumineuse $I(M)$. A l'intérieur de « l'enveloppe » décrite par $\sin_c\left(\frac{b}{2}\Delta\nu\right)$ on observe une modulation rapide de l'intensité avec le terme $\cos \frac{2\pi}{c}\delta\nu_0$.

voir « Sextant » p 235

Dans le cas d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, la d.d.m. est $\delta = 2e$.

Valeurs particulières de $I(M)$:

$$\delta = 0 \quad \sin_c(x) \rightarrow 1 \text{ et } \cos(y) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow I(M) = 4I^*$$

$$\sin_c(x) \rightarrow 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow k \in \mathbb{Z}^*$$

$$x = \frac{\pi\delta(e)}{c}\Delta\nu = \pm\pi \quad \text{pour } k = \pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\delta(e)} = \pm \frac{\Delta\nu}{c} = \pm \left(\frac{\nu_2}{c} - \frac{\nu_1}{c} \right) = \pm \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \pm \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \approx \pm \frac{\Delta\lambda}{\langle\lambda\rangle^2} \quad \text{avec } \lambda_1\lambda_2 \approx \langle\lambda\rangle^2 = \lambda_0^2$$

D'où : $\delta(e) = \pm \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ Soit $\Delta\delta$, l'écart entre les deux d.d.m. pour lesquelles $\sin_c = 0$ et donc $I(M) = 2I^*$.

$\Delta\delta = 4e = 2 \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ On peut montrer que la longueur de cohérence associée à la source est $L = 2e$, or cette longueur est facilement mesurable à l'aide d'un interféromètre de Michelson, en cherchant les « 0 de visibilité » i.e. les positions du miroir M_1 pour lesquelles $I(M)$ est constante $\forall M$ (écran uniformément éclairé / $I(M) = 2I^*$). On en déduit :

$$L_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

IV. CAS GENERAL

$dI(M, \nu) = 2 dI(\nu) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu\right) \right)$ avec $dI(\nu) = \frac{I(\nu)}{\Delta\nu} d\nu$ et $I(\nu)$, la fonction qui décrit le spectre (complexe) de la source³.

Si $I(\nu)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[0, \infty]$ alors :

$$I(M) = \int_0^\infty dI(M, \nu) = \frac{2}{\Delta\nu} \left\{ \int_0^\infty I(\nu) d\nu + \int_0^\infty I(\nu) \cos(b\nu) d\nu \right\} \quad \text{avec } b = \frac{2\pi}{c} \delta$$

Le terme $\int_0^\infty I(\nu) d\nu$ correspond à « l'aire » de la fonction $I(\nu)$ donc à une constante.

Le terme $\int_0^\infty I(\nu) \cos(b\nu) d\nu$ est la Transformée de Fourier, en cosinus, de la fonction continue $I(\nu)$, sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$ avec $I(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$.

On peut donc faire l'acquisition du graphe $I(e)$, évolution de l'intensité au centre de la figure d'interférence (en « sortie » du Michelson) en fonction de l'épaisseur (e) de la « lame d'air », puis par TF inverse retrouver le spectre $I(\nu)$ de la source utilisée pour éclairer le Michelson. Cette manipulation est relativement aisée, aujourd'hui, car on dispose d'une part de « moteurs lents » permettant une variation lente et régulière de e en fonction du temps, mais surtout, on peut facilement faire l'enregistrement de $I(e)$ avec une photodiode et une carte d'acquisition + logiciel idoine. Comme la plupart des logiciels proposent des fonctions du type FFT, on peut envisager d'extraire le spectre $I(\nu)$ avec du matériel de TP disponible dès le niveau L3...quand tout va bien !

Bibliographie :

<https://phitem.univ-grenoble-alpes.fr/system/files/UJF/caliens.pdf>

« Montages pour l'agrégation », Duffait, Bréal, Chp I « Sources » p11, Chp VI « Spectro » p 121

« Optique expérimentale », Sextant, Hermann

Exercice : 2016 / Agrégation Externe de Chimie (section PC) / Composition de Physique / « Le spectroscope IR à transformée de Fourier »

³ Dans un traitement « classique », cette fonction est une Lorentzienne (lampe basse pression) ou une Gaussienne (lampe haute pression).