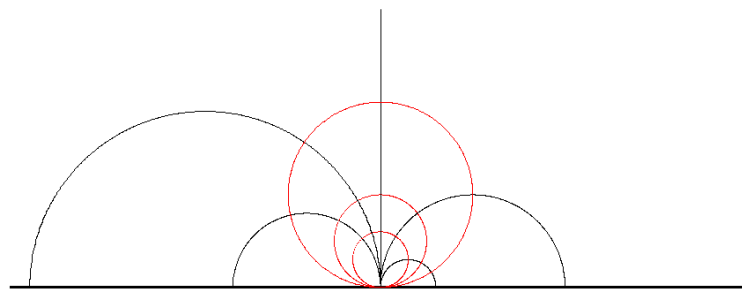
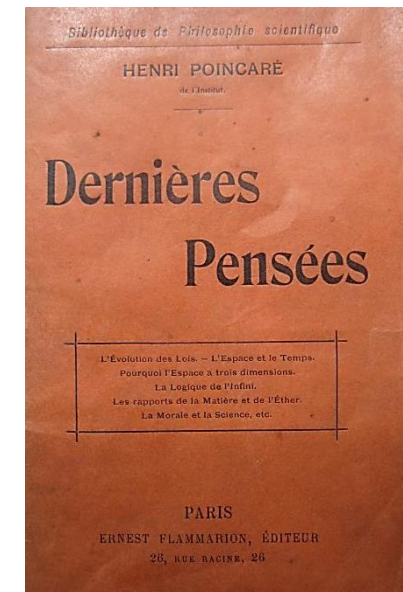
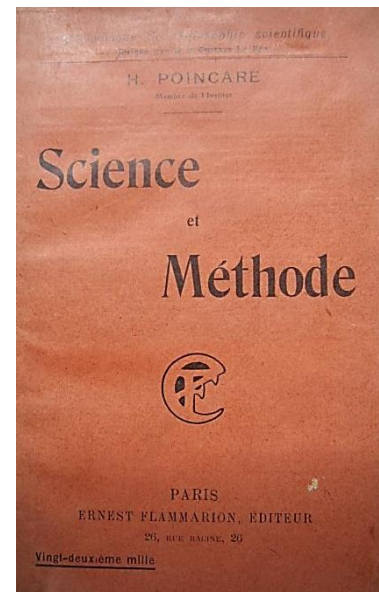
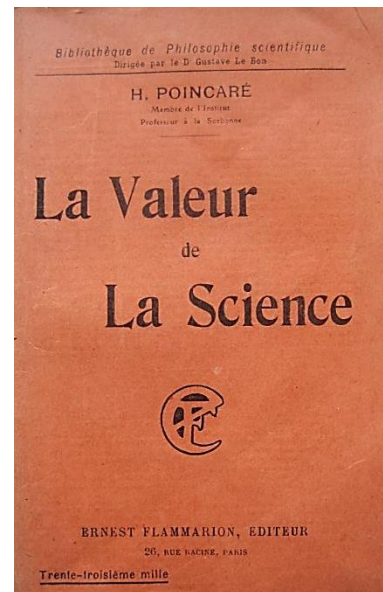
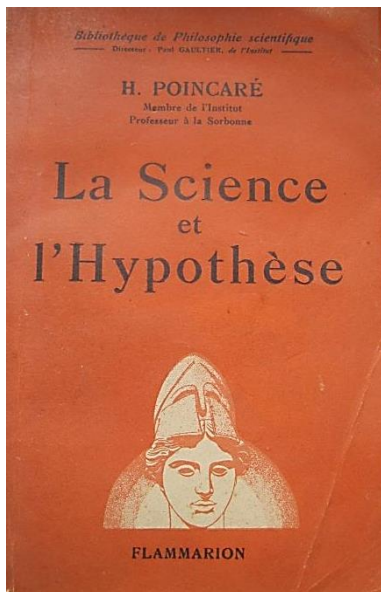


Poincaré et la théorie de l'espace



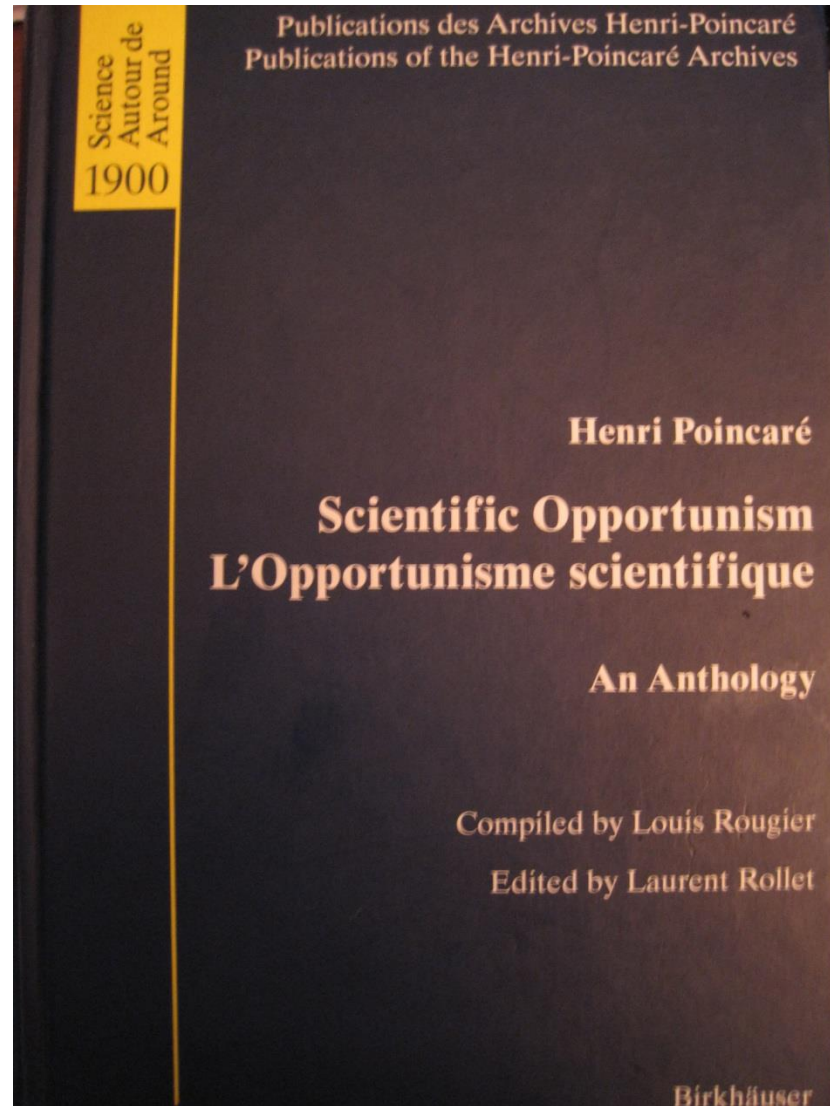
Le problème philosophique de l'espace :

Les livres philosophiques d'Henri Poincaré



Des recueils d'articles publiés dans des revues philosophiques professionnelles (*Revue de métaphysique et de morale*), dans des revues de vulgarisation (*Revue générale des sciences pures et appliquées*, *Revue du mois*, *L'éclairage électrique...*)

Le problème philosophique de l'espace :



Le problème philosophique de l'espace :

- 1887 Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la SMF*.
- 1891 Les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*.
- 1892 Correspondance sur les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*.
- 1895 L'espace et la géométrie, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1897 Réponse à quelques critiques, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1898 On the Foundations of Geometry, *The Monist*.
- 1899 Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1900 Sur les principes de la géométrie. Réponse à M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1902 Les fondements de la géométrie – *Grundlagen der Geometrie* par M. Hilbert, *Bulletin des sciences mathématiques*.
- 1903 L'espace et ses trois dimensions (article en deux parties), *Revue de métaphysique et de morale*.
- 1912 Pourquoi l'espace a trois dimensions, *Revue de métaphysique et de morale*.

Deux moments de la réflexion de Poincaré sur la théorie de l'espace

- Une réflexion philosophique sur le statut des axiomes de la géométrie
- Une théorie psycho-physio-logico-mathématique de la genèse de la géométrie et de l'espace

Je me suis demandé quel est le véritable caractère des vérités géométriques et en particulier du postulatum d'Euclide. [...] J'ai recherché également à analyser l'origine psychologique de la notion d'espace.

[Poincaré 1901, *Analyse de ses travaux*]

Le conventionalisme géométrique de Poincaré

- Les axiomes de la géométrie sont des *conventions* :

Notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. [Poincaré 1902 – *La Science et l'hypothèse*]

- L'étude de la géométrie n'est que l'étude d'un groupe (de transformations).
- La géométrie euclidienne est la plus *commode* pour rapporter nos sensations et les phénomènes physiques :

Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus *commode*. [Poincaré 1902 – *La Science et l'hypothèse*]

Les contextes mathématiques et philosophiques

Quel espace ?

- 1) L'espace intuitif habituel, c'est-à-dire la représentation de l'espace telle que notre esprit le conçoit.
- 2) L'espace physique dont les propriétés nous sont données par l'expérience.
- 3) Les espaces abstraits, c'est-à-dire les conceptions plus générales que nous pouvons déduire de l'espace intuitif ordinaire par abstraction ou généralisation. »

Enriques – *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*

C'est la géométrie non-euclidienne, établie entre 1815 et 1830 par Gauss, Bolyai et Lobachevsky qui conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle. »

Enriques – *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*

D'autres formulations de ces questions et quelques réponses



Federigo Enriques



Emmanuel Kant



Bernhard Riemann



Carl Friederich Gauß

- 1800 Les espaces intuitif et physique sont quasiment indifférenciés.
Soit, cet espace unique est *a priori* (Descartes, Kant). Chez Kant, l'espace est une intuition pure *a priori*, c'est-à-dire une condition de l'expérience. La géométrie euclidienne est la science de cet espace.
Soit cet espace est empirique (d'Alembert, Condillac, Hume).
- 1830 Émergence des géométries non-euclidiennes. Quelle est la géométrie de l'espace physique ? Des expériences.
Réception faible tant dans les milieux mathématiques, meilleures dans les milieux philosophiques (Le problème de l'espace est une question essentiellement philosophique).

D'autres formulations de ces questions et quelques réponses

1854 Conférence d'habilitation de Riemann.

L'espace physique (celui de notre expérience) est présenté comme un cas particulier de la notion plus générale d'espace mathématique.

Conception empiriste (modérée) de l'espace physique.

1864 Publication du *Nachlass* de Gauss.

1868 Travaux de Beltrami, Riemann, Klein et Helmholtz (modèles euclidiens et projectifs de la géométrie non-euclidienne). 'Redécouverte' des géométries non-euclidiennes.

Distinction définitive du problème mathématique et du problème physique.

En France, le grand 'passeur' de ces travaux est Jules Hoüel, traducteur des travaux de Lobachevski, Bolyai, Beltrami, Riemann et Helmholtz.

Travaux de Helmholtz ; distinction des problèmes de l'espace intuitif et de l'espace physique.



Nicolai Lobatchevsky



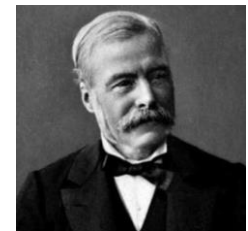
Janos Bolyai



Eugenio Beltrami



Hermann Helmholtz



Jules Hoüel

D'autres formulations de ces questions et quelques réponses

Trouver des propriétés qui sont vérifiées aussi bien par la famille des mouvements euclidiens que par les deux familles de mouvements non-euclidiens et qui distinguent ces trois familles de toutes les autres possibilités.

Lie – *Theorie der Transformationengruppen* III

Deux questions philosophiques :

Quel est le statut des axiomes de la géométrie ?

[...] nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques. Sont-ce des jugements synthétiques a priori, comme disait Kant ? [...] Devons-nous donc conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ?»

Poincaré – *Les Géométries non-euclidiennes*

Si on n'admet pas le caractère a priori des axiomes de la géométrie, pourquoi la géométrie euclidienne a-t-elle un tel caractère d'évidence ?

D'autres formulations de ces questions et quelques réponses

On peut, avec les *idéalistes*, admettre que l'espace se réduit à nos perceptions, comme ayant seules une réalité. On peut admettre, au contraire, avec les *réalistes* que cet espace est une réalité propre existant en dehors et indépendamment de nos perceptions. [Calinon 1893]

Le choix de ces propriétés [les axiomes de la géométrie] est *a priori* arbitraire et soumis à la seule condition de n'offrir rien de contradictoire. Seulement, en vue de l'utilité que l'on veut tirer de la science abstraite, on s'efforce de les rapprocher autant que possible des propriétés que l'on observe approximativement dans les phénomènes réels. [Hoüel 1876]



Paul Tannery



Théodule Ribot

La proposition de Poincaré

[...] composer une géométrie complète, exempte de toute contradiction, mais renfermant encore un paramètre indéterminé. [Hoüel 1876]

L'expérience nous conduit à admettre que [ce paramètre] est nul, et comme d'ailleurs cette hypothèse simplifie beaucoup la Géométrie, on a dû adopter exclusivement pour les usages réels la Géométrie enseignée par Euclide, et qui a toujours représenté les phénomènes dans la limite des erreurs d'observation. [Hoüel 1876]

La géométrie de Lobatchewsky diffère essentiellement de toutes les théories dont nous avons parlé jusqu'à présent. Son objet est de reconstituer entièrement la science de l'espace après avoir rejeté la célèbre proposition généralement connue en France sous le nom de *postulatum* d'Euclide, et y avoir substitué une hypothèse qui comprend celle d'Euclide, comme cas singulier. [P. Tannery 1876]

La proposition de Poincaré

C'est elle [l'expérience] qui fournit la matière que l'esprit s'assimile avant de formuler ses axiomes ou ses hypothèses. [Tannery 1876]

N'y a-t-il pas un criterium absolu qui doive nous permettre de le discerner ? [Tannery 1876]

N'y a-t-il pas un pourquoi en raison duquel ce complexe objectivable soit tel plutôt que tel autre ? [Tannery 1876]

La géométrie, ainsi définie, [...] n'a plus aucune base expérimentale; elle consiste simplement dans l'application de la méthode dite géométrique à un groupe de formes (lignes ou surfaces) dont la première est soumise à cette condition de permettre l'application de cette méthode.

Comme nous le verrons plus loin, la géométrie ainsi comprise est une *science plus générale* que la géométrie des anciens. [Calinon 1889]

La proposition de Poincaré

Une solution autant en rupture avec les thèses kantiennes qu'avec les thèses empiristes

Pour discuter cette opinion, nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques.

Sont-ce des jugements synthétiques *à priori*, comme disait Kant ?

Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne.

Devons-nous donc conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ?

Mais une difficulté subsiste, et elle est insurmontable. Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte, elle serait soumise à une continuelle revision. Que dis-je ? elle serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur puisque nous savons qu'il n'existe pas de solide rigoureusement invariable.

Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques à priori ni des faits expérimentaux.

Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement vrais*, quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.

La proposition de Poincaré

Dès lors, que doit-on penser de cette question :
La géométrie euclidienne est-elle vraie ?

Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être

plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode*.

Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :

1° Parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ;

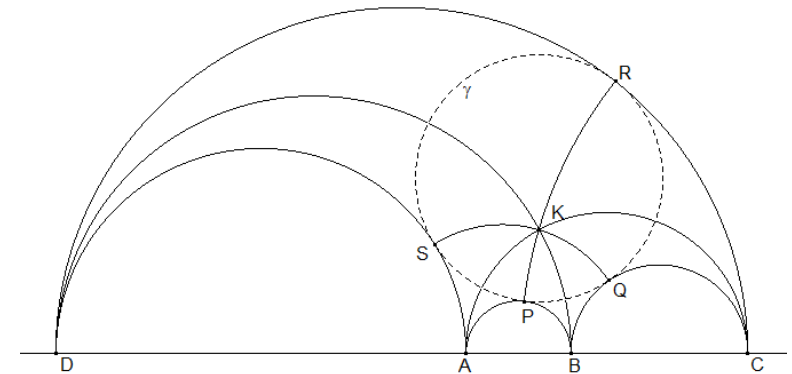
2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil, et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure.

La proposition de Poincaré

Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même :

<i>Espace</i>	Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental.
<i>Plan</i>	Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental.
<i>Droite</i>	Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental.
<i>Sphère</i>	Sphère.
<i>Cercle</i>	Cercle.
<i>Angle</i>	Angle.
<i>Distance de deux points</i>	Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement.
etc...	etc...

Prenons ensuite les théorèmes de Lowatchewski et traduisions-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire.*



Le choix des conventions

Justifié selon les cas par des considérations d'accommodement à notre expérience, soit par des raisons de commodité pratique ou mathématique.

Doit ouvrir un espace de possibilité d'actions, parmi lesquelles celles de donner des significations, de définir de nouveaux objets.

Lié à des capacités de notre esprit.

Une convention n'est pas imposée. Nous sommes seulement guidés vers elle par l'expérience.