

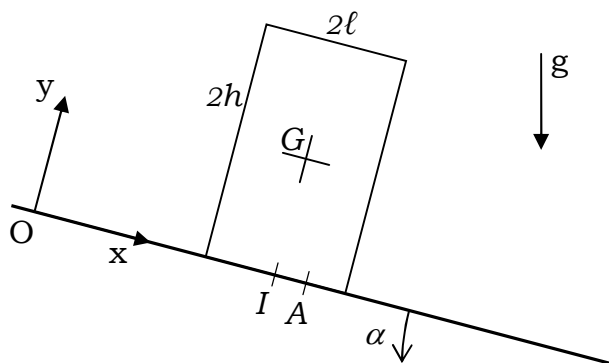
SVP, écrivez proprement, explicitez clairement votre raisonnement, numérotez les questions, tirez un trait entre deux questions, encadrez les résultats.

### A – Sucre posé sur un plan incliné

Un morceau de sucre parallélépipédique est posé sur un plan incliné. On nomme  $\alpha$  l'angle d'inclinaison. Le sucre est soumis à son poids et s'appuie sur le plan incliné ; voir la figure. L'action de ce dernier est assimilée à une force de réaction  $\vec{R}$  passant par un point A de la base de sustentation. On rappelle qu'il s'agit de la surface de contact du sucre avec le plan incliné.

Le problème est assimilé à un problème plan et une des faces du cube est parallèle au plan (O, x, y). Dans un premier temps, le coefficient de frottement du sucre sur le plan incliné est considéré comme infini, c'est-à-dire suffisamment grand pour que le sucre ne puisse pas glisser.

- 1) Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer la réaction  $\vec{R}$ .
- 2) Par application du théorème du moment cinétique, montrer que le point A est à la verticale du centre de masse G.
- 3) Représenter graphiquement le poids et la réaction.
- 4) On appelle I le point milieu de la base du sucre. Déterminer la distance IA en fonction des données de l'énoncé.
- 5) Montrer que le sucre n'est stable que si  $\tan \alpha < \ell / h$ .
- 6) Un morceau de sucre mesure  $1,2 \times 1,7 \times 2,7 \text{ cm}^3$ . En déduire les valeurs de l'angle maximal d'inclinaison (en degrés) pour les différentes orientations possibles de ce morceau de sucre.



Le coefficient de frottement du sucre sur le plan incliné est en réalité fini et nous l'appellerons  $\mu$ . Le frottement est régi par la loi de Coulomb et nous nommerons  $T$  et  $N$  les composantes sur  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  de la réaction qu'exerce le plan incliné sur le sucre.

Nous nous intéressons d'abord à un morceau de sucre immobile.

7) Exprimer  $N$  et  $T$  en fonction des données de l'énoncé,  $m$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

8) Montrer que le sucre ne glissera pas tant que  $\tan \alpha < \mu$ .

Nous nous intéressons maintenant à un morceau de sucre en mouvement auquel on a initialement communiqué une vitesse  $v_0$  vers le haut ( $v_0$  négative).

9) Que vaut la composante  $T$  (selon  $Ox$ ) de la force de frottement. En déduire l'équation d'évolution de la vitesse du morceau de sucre. Au bout de combien de temps le sucre s'arrête-t-il ? On pourra poser  $\mu = \tan \varphi$ .

10) Le sucre ne tournant pas, le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse  $G$  vous donnera la position du point d'application de la réaction du plan sur le sucre. Préciser la position de ce point. Faire un schéma.

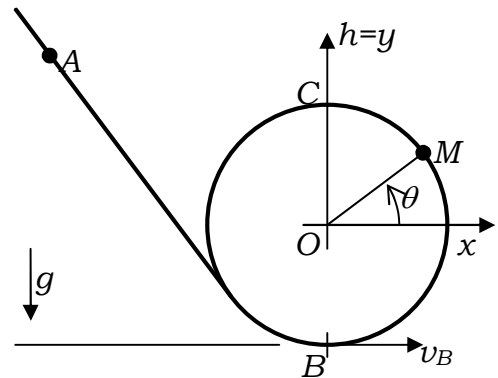
11) Les choses sont-elles différentes si la vitesse initiale du morceau de sucre est vers le bas ( $v_0$  positive) ? Le sucre glissera-t-il plus ou moins longtemps (justifier et quantifier) ?

## B – Looping the loop (Boucler la boucle)

Dans un parc d'attractions, un chariot, assimilé à un point matériel est guidé par des rails qui forment une boucle de rayon  $r$  dans un plan vertical (voir la figure).

Les frottements de l'air sont négligeables. Les roues du chariot sont de masse "nulle" et il n'y a pas de résistance au roulement. Vous pouvez également imaginer que le chariot glisse et qu'il n'y a pas de frottements.

Cet exercice a pour but de déterminer quelle doit être l'altitude du point de départ pour que le chariot boucle la boucle, c'est-à-dire pour qu'il atteigne le sommet  $C$  sans perdre le contact avec les rails qui le guident.



### 1) Conservation de l'énergie mécanique

- Rappeler les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur.
- Justifier de la conservation de l'énergie mécanique et donner l'expression générale de l'énergie mécanique du chariot s'il est à une hauteur  $h$  et animé d'une vitesse  $v$ .
- D'après les conditions initiales de l'énoncé, que vaut l'énergie mécanique du chariot. Ecrire la conservation de l'énergie.
- Déterminer l'altitude du chariot en fonction de  $r$  de l'angle  $\theta$  (voir la figure). Vous vérifierez qu'aux points  $B$  et  $C$  vous retrouvez les valeurs que l'on peut attendre.

- e) En déduire la vitesse du chariot lorsqu'il est entre B et C, au point de coordonnée  $\theta$ .  
On montrera que  $v^2 = 2g(h_A - r \sin \theta)$ .

## 2) Etude de l'accélération

Entre les points B et C le mouvement est circulaire. On utilise donc les coordonnées polaires et on introduit la base locale associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

- a) Donner l'expression générale du vecteur vitesse en coordonnées polaires.
- b) En déduire l'expression du vecteur vitesse et de la vitesse (usuelle) dans le cas particulier d'un mouvement circulaire. Vous devriez obtenir une relation très simple entre  $v$ ,  $r$  et  $\dot{\theta}$ .
- c) Donner l'expression générale de l'accélération en coordonnées polaires.
- d) En déduire l'expression de l'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire.

A l'aide de la réponse à la question (2.b) on montrera que l'accélération peut s'écrire

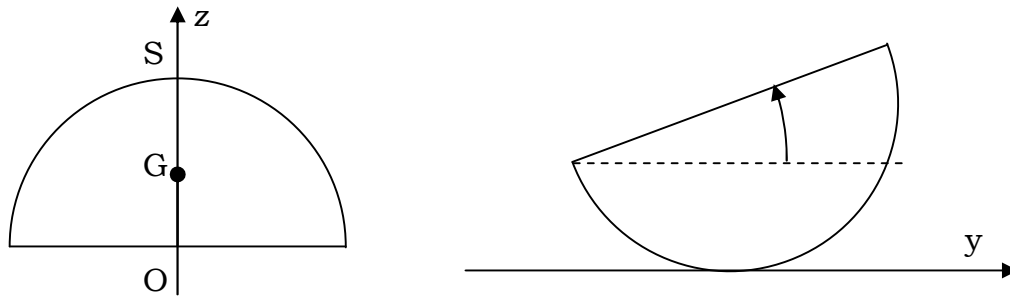
$$\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_\theta - \frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

## 3) Détermination de la réaction du support

Il est rappelé que la réaction du support est perpendiculaire à la vitesse du chariot et qu'elle s'écrit donc  $\vec{R} = -N \vec{u}_r$  où  $N \geq 0$ .

- a) Que signifie physiquement l'inégalité ci-dessus ?
- b) Exprimer le poids sur la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  des coordonnées cartésiennes, puis sur la base locale des coordonnées polaires.
- c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) sur la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .
- d) Une des équations scalaires donne la réaction des rails sur le chariot. En déduire  $N$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $v$ ,  $r$  et  $\theta$ .
- e) Utiliser la conservation de l'énergie et montrer que
- $$\frac{N}{mg} = 2 \frac{h_A}{r} - 3 \sin \theta$$
- f) Si le chariot démarre d'un point A situé à la même hauteur que C, pour quel angle  $\theta$  le chariot décollera-t-il ?
- g) Quelle doit être la valeur minimale de la hauteur initiale,  $h_A$ , pour que le chariot reste en contact avec les rails pour tout angle  $\theta$  ?
- h) Pour cette valeur de  $h_A$ , de combien de fois son poids le chariot appuie-t-il sur les rails lorsqu'il est en B, en bas de la boucle ?

## C – Quelques propriétés d'une demi-boule



Nous considérons ici une demi-boule pleine homogène, de masse  $m$ , masse volumique  $\rho$  et de rayon  $R$ .

- Rappeler l'expression du volume de cette demi-boule. En déduire un lien entre la masse, la masse volumique et le rayon.
- Via le calcul d'une intégrale, déterminer la position de son centre de masse  $G$ .
- Par un autre calcul d'intégrale, déterminer le moment d'inertie,  $J_z$ , autour de l'axe de symétrie  $Oz$ .
- Déterminer le moment d'inertie par rapport au plan de base ( $O, x, y$ ).
- En déduire le moment d'inertie par rapport à une droite du plan de base et passant par  $O$ . On appellera  $J_{Ox}$ , ce moment d'inertie.
- Par application du théorème d'Huygens, déterminer le moment d'inertie par rapport à la droite  $Gx$ ,  $J_{Gx}$ .
- Par une seconde application du théorème d'Huygens, déterminer le moment d'inertie,  $J_{Sx}$ , par rapport à la droite  $Sx$ , parallèle aux deux précédentes mais passant par le sommet  $S$ .

### **Oscillations d'une demi-boule sur un plan horizontal**

Si l'on pose cette demi-boule sur son sommet et lorsque celle-ci roule sans glisser sur un plan horizontal, la période des petites oscillations est donnée par  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S}{mga}}$  où  $a = OG$ .

- Donner l'expression de cette période dans le cas d'une boule pleine.