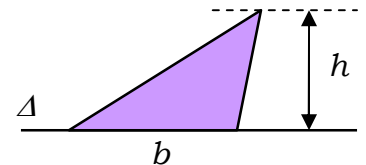


SVP, écrivez proprement, explicitez clairement votre raisonnement, numérotez les questions, tirez un trait entre deux questions, encadrez les résultats.

A – Moments d'inertie de quelques plaques planes

Plaque triangulaire

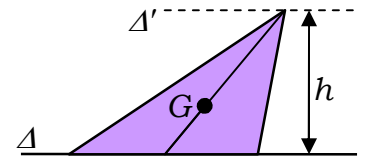
On considère une plaque plane homogène de forme triangulaire, le triangle étant quelconque. On s'intéresse au moment d'inertie de cette plaque par rapport à une de ses arrêtes. Soit m sa masse, b la base du triangle et h sa hauteur.



- 1) Calculer le moment d'inertie par rapport à la droite Δ .

Plaque triangulaire, moment d'inertie en G, J_G

Il est rappelé que le centre de masse est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle. Ces dernières se coupent aux $2/3$ de leur longueur en partant du sommet.



- 2) A l'aide du théorème d'Huygens, en déduire le moment d'inertie par rapport à la droite passant par G et parallèle au côté considéré du triangle.

Plaque triangulaire, moment d'inertie par rapport à Δ'

- 3) Par l'utilisation une seconde fois du théorème de Huygens, en déduire le moment d'inertie par rapport à la droite Δ' parallèle aux précédentes et passant par le sommet opposé (en pointillés sur la figure).

Plaque hexagonale

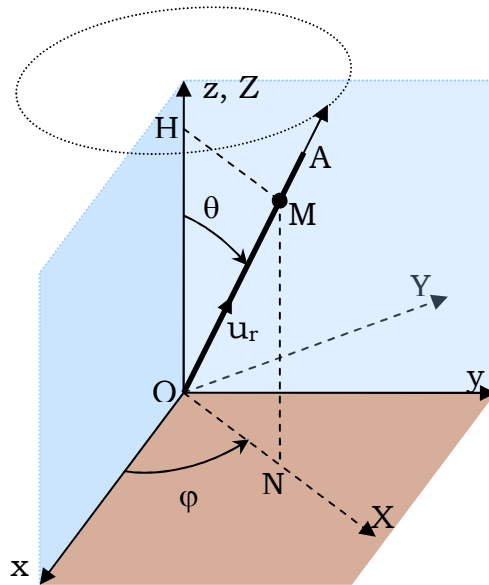
Une plaque hexagonale peut tourner autour de l'axe Δ qui joint deux sommets opposés. Pour calculer son moment d'inertie, on décompose cette plaque en 6 triangles équilatéraux.

- 4) En déduire le moment d'inertie de cette plaque hexagonale. On sera amené à distinguer deux types de triangles. On exprimera le résultat en fonction de la hauteur d'un des triangles, h , puis en fonction de la longueur d'une arête, a .
- 5) Comparer brièvement ce résultat à celui d'un disque.

Anneau sur une tige inclinée tournant autour d'un axe vertical

Soit $\mathcal{A} = (O, x, y, z)$ un référentiel terrestre dont l'axe Oz est confondu avec la verticale. Dans ce référentiel considéré comme galiléen, une tige OA inclinée d'un angle θ constant avec Oz tourne avec une vitesse angulaire $\dot{\phi} = \omega$ que l'on ne supposera pas constante. On introduit le référentiel tournant $\mathcal{R} = (O, X, Y, Z)$ dans lequel la tige OA est fixe.

Un anneau de masse m , assimilé à un point matériel, glisse sans frottement sur la tige OA. Cet exercice consiste à étudier le mouvement de l'anneau.



Cinématique

- 1) Déterminer le vecteur rotation instantanée dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Pour repérer la position de l'anneau mobile M, on introduit le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \overrightarrow{OA}/OA$ et on pose $\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r$.
- 2) Déterminer les vecteurs vitesse relative et accélération relative de l'anneau dans la base $(\vec{u}_r, \vec{I}, \vec{J})$.
- 3) Déterminer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. On pourra utiliser la relation de Chasles et faire intervenir le point H.
- 4) Déterminer l'accélération de Coriolis.

Analyse des forces

La base $(\vec{u}_r, \vec{I}, \vec{J})$ n'est pas orthogonale. Pour cette raison, on introduit le vecteur $\vec{u}_\theta = \vec{J} \wedge \vec{u}_r$ et la nouvelle base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{J})$.

- 5) Ecrire le poids dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{J})$.
- 6) La réaction de la tige peut s'écrire $\vec{R} = R_r \vec{u}_r + R_\theta \vec{u}_\theta + R_Y \vec{J}$. Calculer la puissance de cette force dans le référentiel tournant (où la tige est immobile). En déduire qu'en l'absence de frottements, une des trois composantes est nulle.
- 7) Enfin, écrire la force d'inertie d'entraînement dans cette nouvelle base.

Principe Fondamental de la Dynamique

- 8) Ecrire le principe fondamental de la dynamique sous forme vectorielle.
- 9) Exprimer ensuite le PFD dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{J})$. On n'oubliera pas les forces d'inertie.
- 10) En déduire l'équation différentielle du mouvement, c'est-à-dire une équation faisant intervenir $r(t)$ et ses dérivées.
- 11) En supposant la vitesse de rotation ω constante, donner la solution générale de cette équation.

Moment cinétique

On s'intéresse ici au moment cinétique de l'anneau dans le référentiel absolu.

- 12) Calculer la composante σ_z du moment cinétique de l'anneau selon le vecteur $\vec{k}$. On considère que la tige et l'anneau peuvent tourner librement autour de l'axe Oz. Dans ce mouvement inertiel la composante selon Oz du moment cinétique de l'ensemble anneau + tige demeure constante. On appelle J_z le moment d'inertie de la tige.
- 13) Ecrire la conservation du moment cinétique (uniquement sa composante selon Oz).
- 14) En déduire les variations de la vitesse angulaire de rotation ω en fonction de r .
- 15) Réécrire l'équation du mouvement dans ces nouvelles conditions.