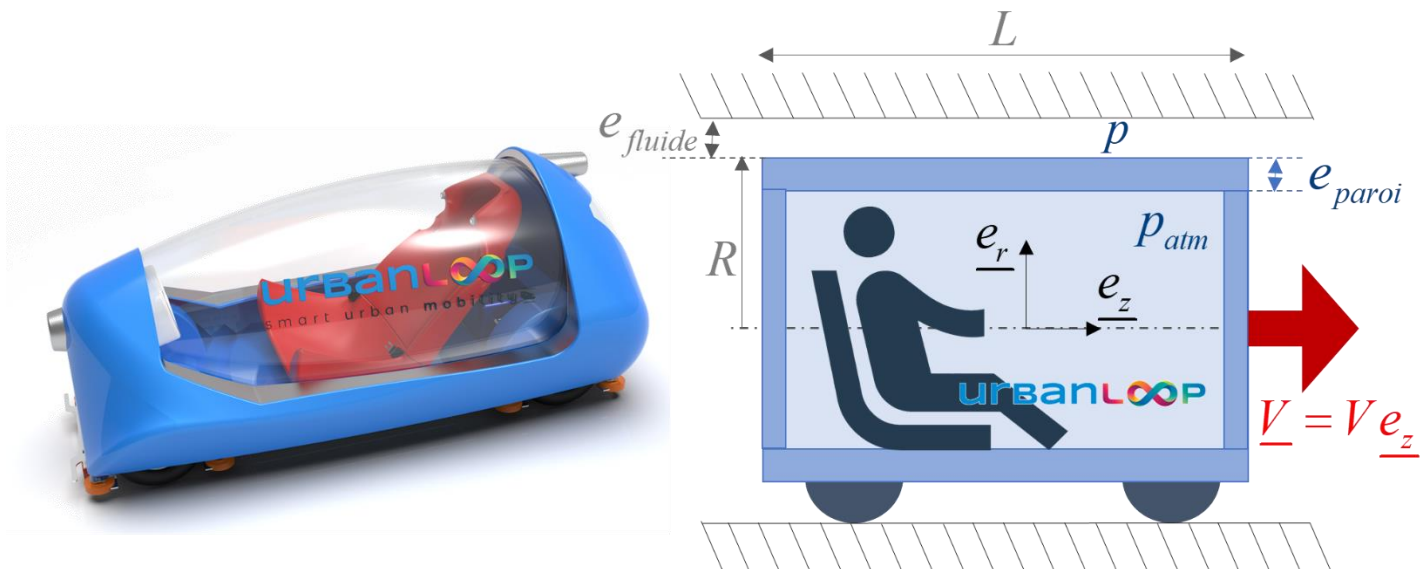


Mécanique des Milieux Continus

20 janvier 2020 2h Aucun document autorisé

Nous nous intéressons aux capsules du projet **UrbanLoop**, projet de mobilité urbaine à l'ENSEM. Pour rappel, ce moyen de transport fait intervenir des **capsules** qui vont se déplacer dans des tubes, chaque capsule comprenant un voyageur qui est guidé vers sa destination.



On considère qu'on maintient la pression atmosphérique à l'intérieur de la capsule. Il règne au sein des tubes une pression qui peut être inférieure ou supérieure à la pression atmosphérique. Pour des raisons d'**encombrement**, on cherche à minimiser la taille des tubes dans lesquels les capsules vont circuler. Pour des raisons de **confort**, on cherche à maximiser l'espace intérieur de la capsule pour le passager.

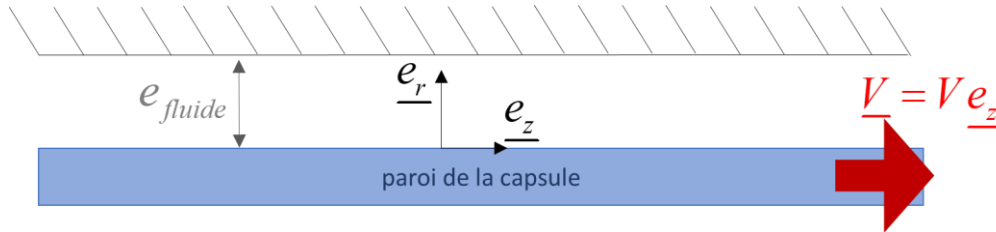
D'une part on va donc chercher à **minimiser l'épaisseur du fluide** qui circule entre la capsule et les tubes : ceci risque de générer des **frottements fluides** importants, qui peut freiner la capsule. **La première partie** sera dédiée au calcul de l'effort résultant de ce frottement.

D'autre part, on va tenter de **minimiser l'épaisseur de la paroi** de la capsule. La **différence de pression** entre l'intérieur et l'extérieur de la capsule peut entraîner des contraintes importantes dans cette capsule, que l'on quantifiera dans une seconde partie afin de **dimensionner la paroi**.

R	rayon externe de la capsule
L	longueur de la capsule
p_{atm}	pression atmosphérique à l'intérieur de la capsule
p	pression à l'extérieur de la capsule
$\underline{V} = V \underline{e}_z$	vitesse de la capsule
e_{fluide}	épaisseur du fluide entre le tube et la capsule
e_{paroi}	épaisseur de la paroi externe de la capsule
η	viscosité du fluide qui entoure la capsule
λ, μ	paramètres de Lamé du matériau qui constitue la paroi de la capsule

Partie I : frottement fluide autour de la capsule (/9)

Dans cette première partie on considère le fluide contenu entre la capsule et le tube, qui sont évidemment tous les deux considérés parfaitement cylindriques. On considère que comme l'épaisseur du fluide est faible, la capsule peut être considérée infiniment longue. Le tube est fixe, tandis que la capsule se déplace à la vitesse $\underline{V} = V \underline{e}_z$.



On considère que l'équation de Navier-Stokes est valide, et que l'écoulement est stationnaire. On considère qu'en raison des hypothèses on a les formes suivantes pour les champs de pression et de vitesses :

$$\underline{v} = v_z(r) \underline{e}_z \quad p = p(r, \theta)$$

1. A partir de l'équation de Navier-Stokes, écrire (sans le résoudre) le système d'équations qui régit les vitesses et la pression dans le fluide. (/2)

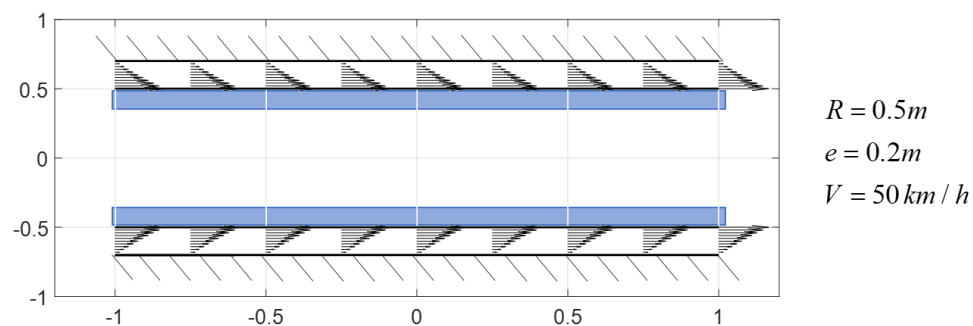
2. Montrer que la pression peut s'écrire sous la forme $p(r, \theta) = \rho g \times f(\theta) \times r + cste$. (/1)

3. Montrer qu'un champ de vitesses de la forme $v_z(r) = C \times \ln(r) + D$ avec C et D des constantes est solution de la projection sur $\underline{e_z}$ de l'équation de Navier-Stokes. (/1)

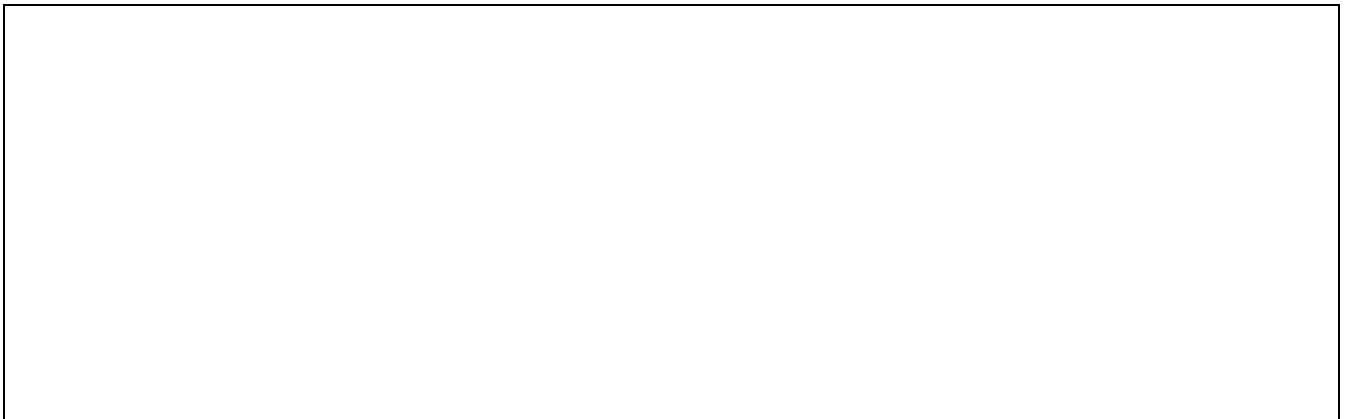
4. A partir des conditions aux limites, montrer que : $v_z(r) = V_0 \ln\left(\frac{r}{R + e_{\text{fluide}}}\right)$ (/1)



Le tracé du champ de vitesses avec des valeurs numériques réalistes donne la figure :

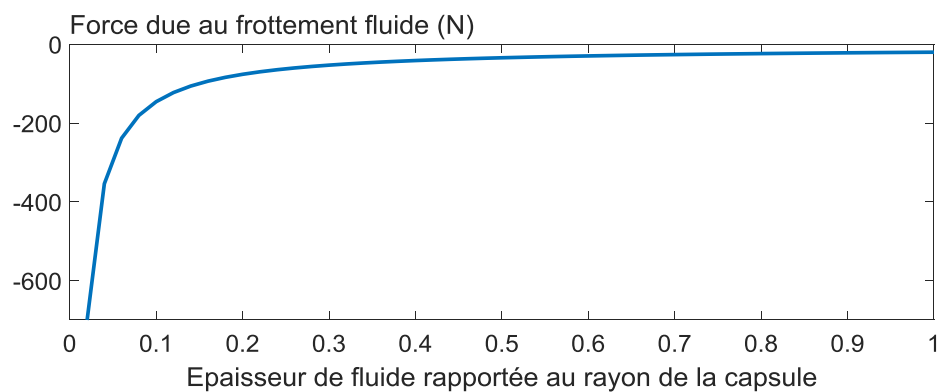


5. On fait l'hypothèse que ce fluide est newtonien. En notant η la viscosité du fluide et p sa pression, calculer le tenseur des contraintes au sein de l'épaisseur du fluide. (/2)



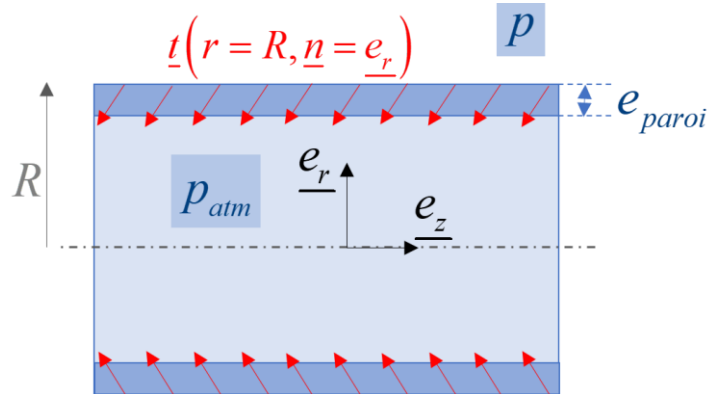
6. Calculer le vecteur-contrainte à la surface de la capsule, puis l'effort total selon $\underline{e}_z$ appliqué à la capsule en raison du frottement fluide (vérifier sa dimension). (/2)

Le tracé de l'évolution de cet effort en fonction de l'épaisseur relative du fluide par rapport au rayon de la capsule donne la courbe suivante : plus cette épaisseur sera petite, plus l'effort de frottement sera important.



Partie II : dimensionnement de la capsule (/11)

On considère désormais la paroi latérale de la capsule, que l'on va tenter de dimensionner en fonction du rapport des pressions externes et internes p et p_{atm} .



D'après ce qui précède on vient de calculer que la surface extérieure de la capsule était soumise au champ de vecteur-contraintes suivant :

$$\underline{t}(r=R, \underline{n}=\underline{e}_r) = -p\underline{e}_r + \frac{\eta V_0}{R} \underline{e}_z$$

En raison de la physique du problème on considère qu'on a un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{u}(r) = u_r(r)\underline{e}_r + u_z(r)\underline{e}_z$$

7. La surface intérieure de la paroi de la capsule (rayon $R - e_{paroi}$) est soumise à la pression atmosphérique, tandis que la surface extérieure de la paroi est soumise à la densité surfacique d'efforts ci-dessus. Ecrire ce que ces conditions impliquent sur les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$. (/2)

8. En considérant que la paroi se déforme peu sous l'effet de ces chargements, calculer le tenseur des déformations dans la paroi de la capsule. Expliquer physiquement chacun des termes non nuls obtenus dans ce tenseur. (/2)

9. En considérant que le matériau qui constitue la paroi est élastique, linéaire et isotrope, déterminer le champ de contraintes dans la paroi de la capsule. (/1)

10. A partir de l'équation d'équilibre, déterminer (sans le résoudre) le système d'équations que doivent satisfaire les composantes du champ de contraintes. On considère que les effets de la gravité et de l'accélération sont négligés. (/1)

11. La forme $u_z = A \times \ln(r) + B$ est solution d'une des équations obtenues en question précédente. Déterminer la constante A à partir des conditions aux limites écrites précédemment. Peut-on déterminer la constante B et à quoi correspond-elle ? (/2)

On considère que u_z est négligeable devant u_r car $\eta \ll \mu$. Après calculs, on montre que la projection sur $\underline{e}_r$ de l'équation d'équilibre mène à l'équation différentielle :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r = 0 \text{ qui a pour solution } u_r(r) = C \times r + \frac{D}{r} \text{ avec } C \text{ et } D \text{ des constantes}$$

12. Ecrire (sans le résoudre) le système de deux équations qui permet de déterminer les deux constantes C et D . (/1)

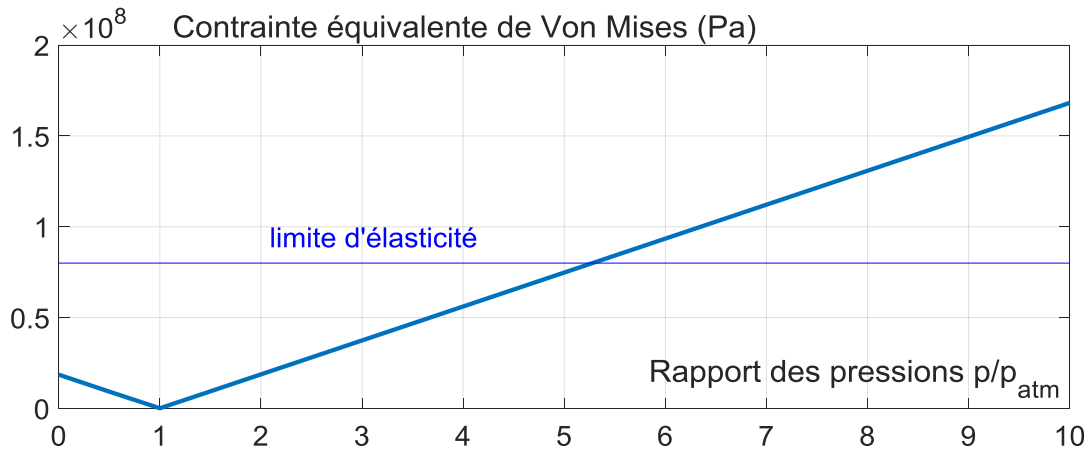
Le problème d'élastostatique est désormais résolu puisqu'on connaît $\underline{u}$, $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$. Le tenseur des contraintes est globalement de la forme : $\underline{\sigma} = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

Les composantes du tenseur des contraintes dépendent évidemment de l'épaisseur de la paroi, du rapport des deux pressions externe et interne, et du rayon de la capsule. Elles dépendent également des coefficients de Lamé, dont les valeurs peuvent être déterminées en fonction des paramètres du matériau E et ν . Pour dimensionner la paroi, ces contraintes vont être comparées à la valeur de R_e .

13. A quoi correspondent les paramètres E , ν et R_e ? Comment les caractériser ? Quelle sont leurs unités ? (/1)

14. Comment comparer le tenseur $\underline{\sigma}$ à la valeur de R_e pour dimensionner la capsule ? (/1)

Avec des valeurs numériques réalistes, pour une paroi en Plexiglas d'une épaisseur de 2mm, on a représenté ci-dessous les valeurs de la contrainte équivalente de Von Mises en fonction du rapport des pressions externe et interne. On constate qu'il est possible de faire le vide dans le tube sans que la paroi ne sorte de son régime élastique, et qu'elle est également capable de supporter une pression externe d'environ 5 fois la pression atmosphérique.



Formulaire

Tenseur des déformations linéarisé : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Tenseur taux de déformation : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T)$

En coordonnées cylindriques :

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta) & \frac{\partial T_r}{\partial z} \\ \frac{\partial T_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r) & \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} & \frac{\partial T_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [\underline{\underline{div}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_{r\theta} + T_{\theta r}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equation d'équilibre : $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$

Loi de Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda Tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$

Comportement du fluide newtonien : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\eta \underline{\underline{d}}$

Contrainte équivalente de Von Mises : $\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$

Equation de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\underline{\Delta}} \underline{v} + \rho \underline{g}$