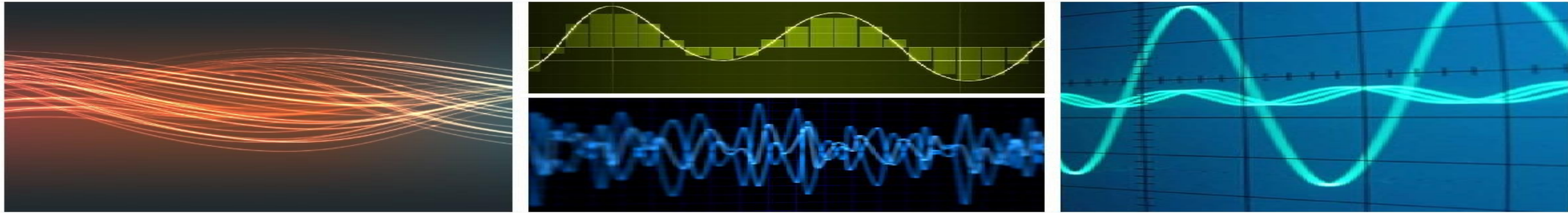


Les Signaux

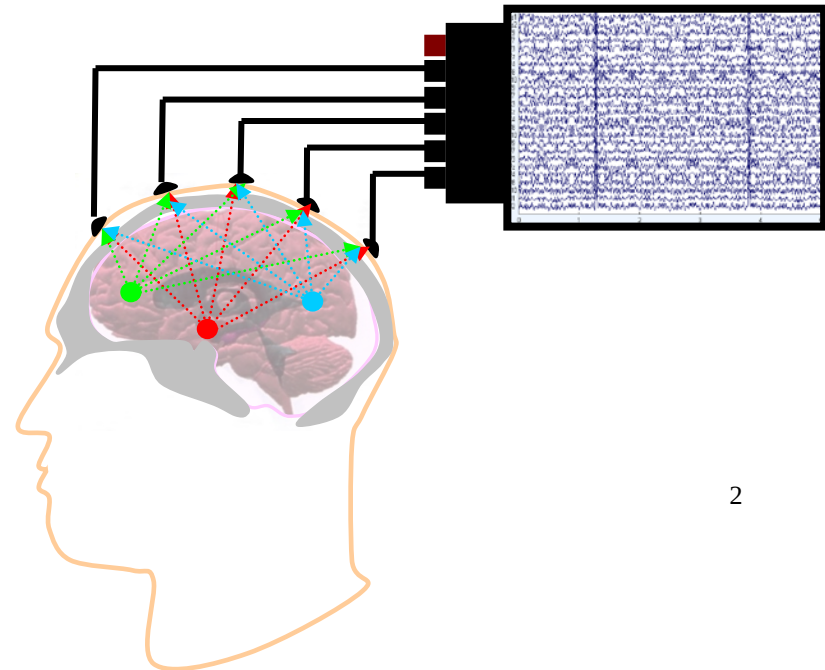
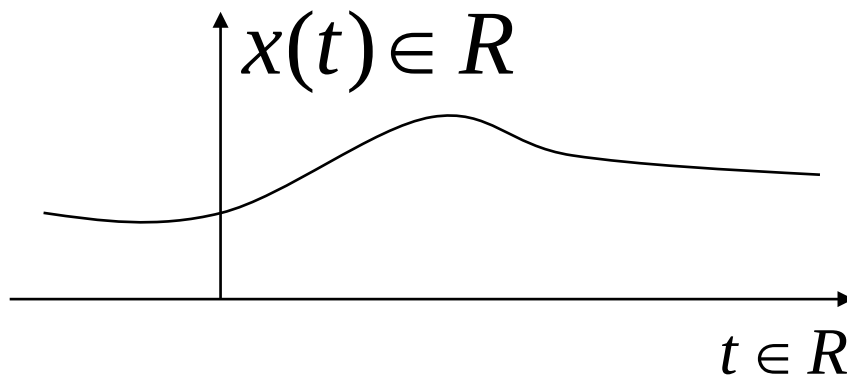
Ensemble d'appartenance des signaux

Signal = Toutes grandeurs mesurées susceptibles de contenir de l'information

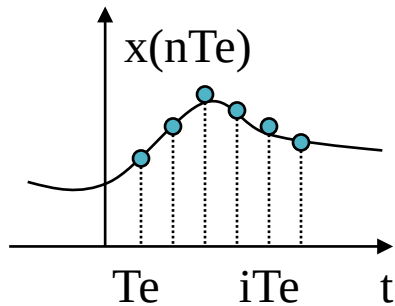


- Signal à temps continu

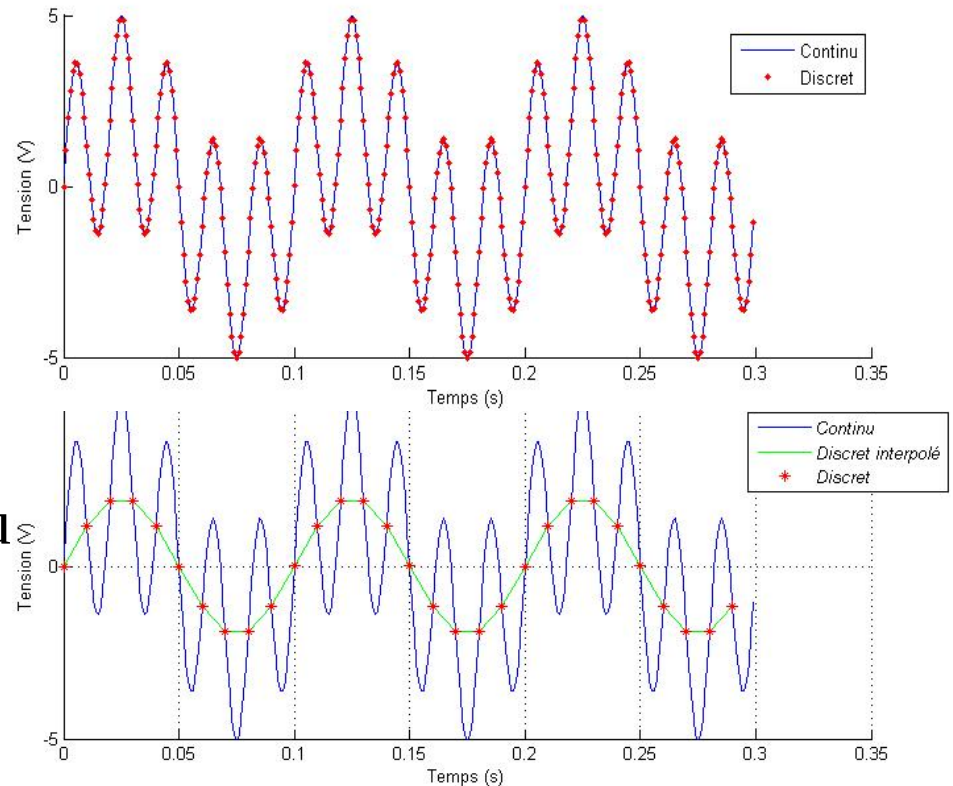
$x(t) \in I$ $x \in R$ existe et $t_{Norm} \in I$ $t \in R$



Ensemble d'appartenance des signaux



Le passage analogique - numérique implique une perte d'information ; l'un des objets du traitement du signal consiste à minimiser cette perte.



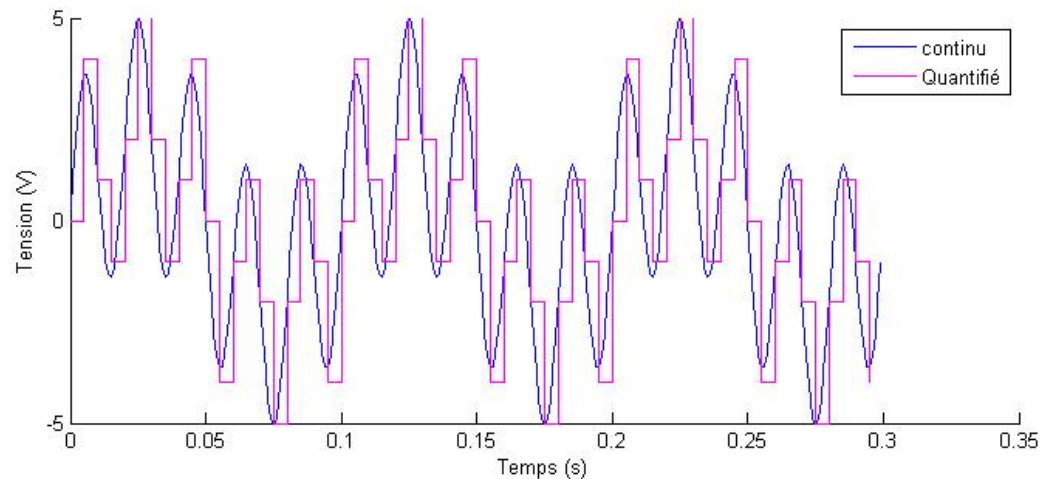
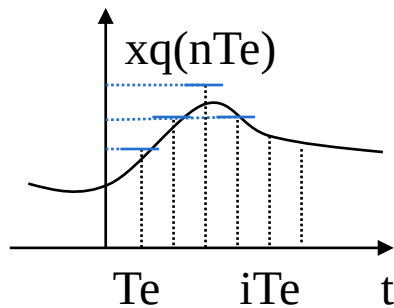
Signaux

- Ensemble d'appartenance des signaux

- Signal numérique $x_q \rightarrow$ signal à variable discrète + quantification de son amplitude

$x_q(t) \in I_x \in \mathbb{N}$ existe que pour certaines valeurs de t

Si la différence $t_{i-1} - t_i$ est constante : $t_{i-1} - t_i = T_e$ alors $t/T_e = t_{Norm}$ et $t_{Norm} \in \mathbb{N}$



Remarque : Dans ce module de MSS 1A, les signaux traités seront uniquement des signaux à temps continu (variable continue)

Signaux

Si le signal est fourni par un **système physique réel**, il possède donc les propriétés suivantes:

- l'énergie du signal est bornée
- l'amplitude du signal est bornée
- l'amplitude du signal est une fonction continue, en raison de l'inertie des systèmes
- le spectre du signal est borné et tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini.

Modèle

Le modèle d'un signal = représentation mathématique qui repose sur des hypothèses simplificatrices voire parfois erronées

- Permet d'accéder aux calculs théoriques
- Le modèle est donc une approximation de la réalité, dans lequel on considère des propriétés importantes dans le contexte de l'étude.
- L'intérêt du modèle dépend de la qualité de l'approximation et de sa facilité d'emploi, dans un contexte donné (Ch Jutten).

Classification des signaux

Représentation temporelle des signaux

Classification du signal basée sur l'évolution du signal en fonction du temps

Signal déterministe = ces valeurs peuvent être prédites de façon exacte par un modèle mathématique déterminé par des caractéristiques et la ou des variables d'évolution

→ un signal déterministe dont le modèle est parfaitement connu ne véhicule aucune information au sens de la mesure

→ Si une partie des paramètres de ce modèle est inconnue, alors l'information réside dans ces paramètres inconnus à estimer

Exemple : $S(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$ l'information de la mesure réside dans la non connaissance de l'amplitude $A(t)$ ou de ω ou de φ

Classification des signaux

Représentation temporelle des signaux

Classification du signal basée sur l'évolution du signal en fonction du temps

- Signal déterministe = ces valeurs peuvent être prédites de façon exacte par un modèle mathématique déterminé par des caractéristiques et la variable d'évolution

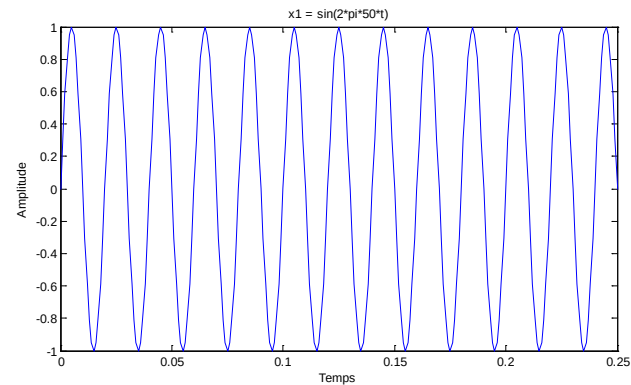
Exemple:

$$x1(t) = \sin(2\pi 50t)$$

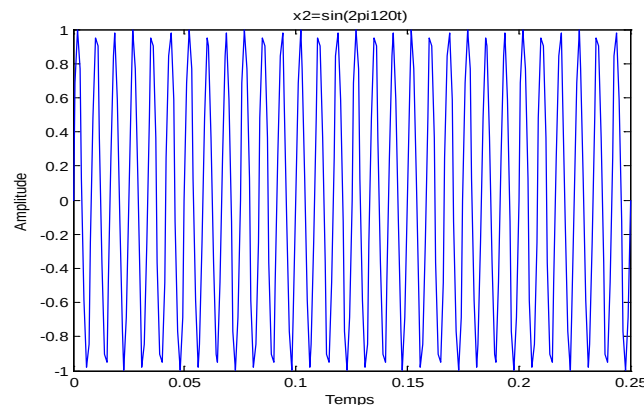
$$x2(t) = \sin(2\pi 120t)$$

$$x(t) = x1(t) + x2(t)$$

$$= \sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 120t)$$

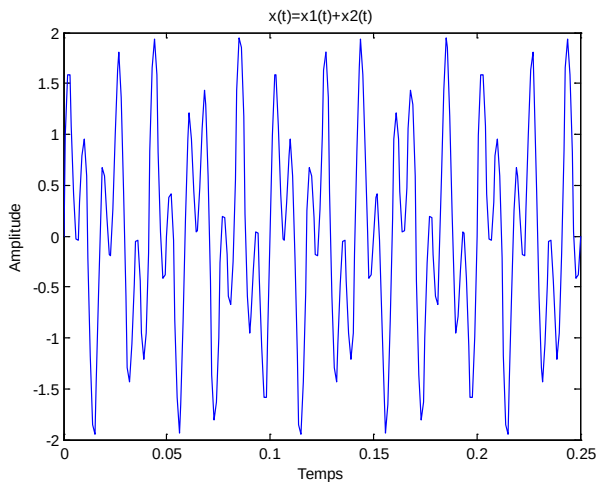


$x1(t)$



$x2(t)$

$x(t)$



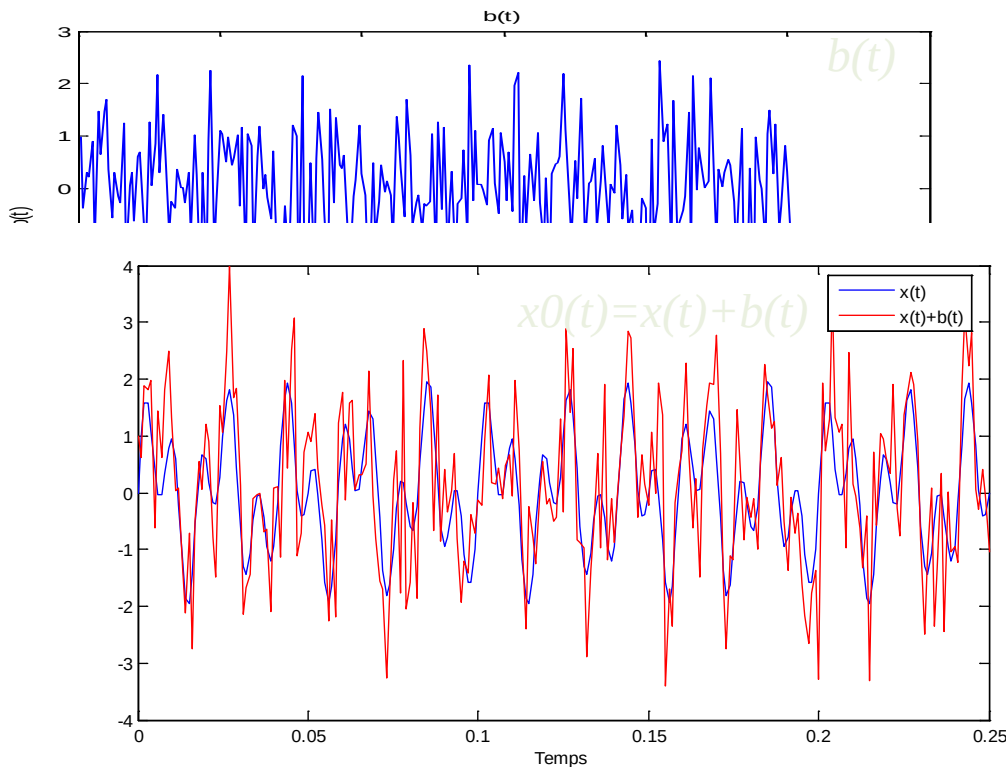
Classification des signaux

Représentation temporelle des signaux

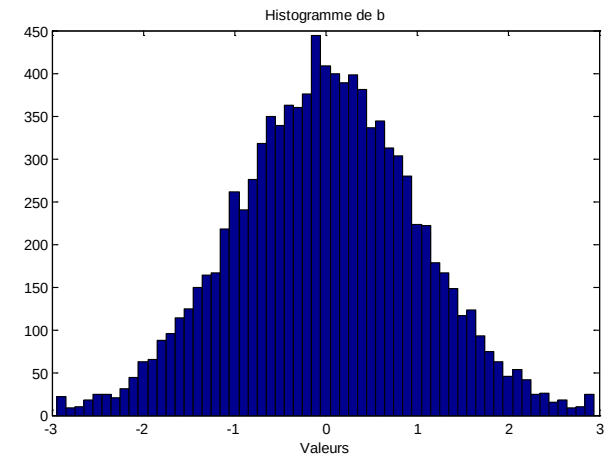
Classification du signal basée sur l'évolution du signal en fonction du temps

• Signal aléatoire (Stochastique) = signal issu d'un processus aléatoire ➔ il n'est pas prédictible

$$x0(t)=x(t)+b(t) =x1(t)+x2(t)+ b(t)=\sin(2\pi 50t)+\sin(2\pi 120t)+ b(t)$$



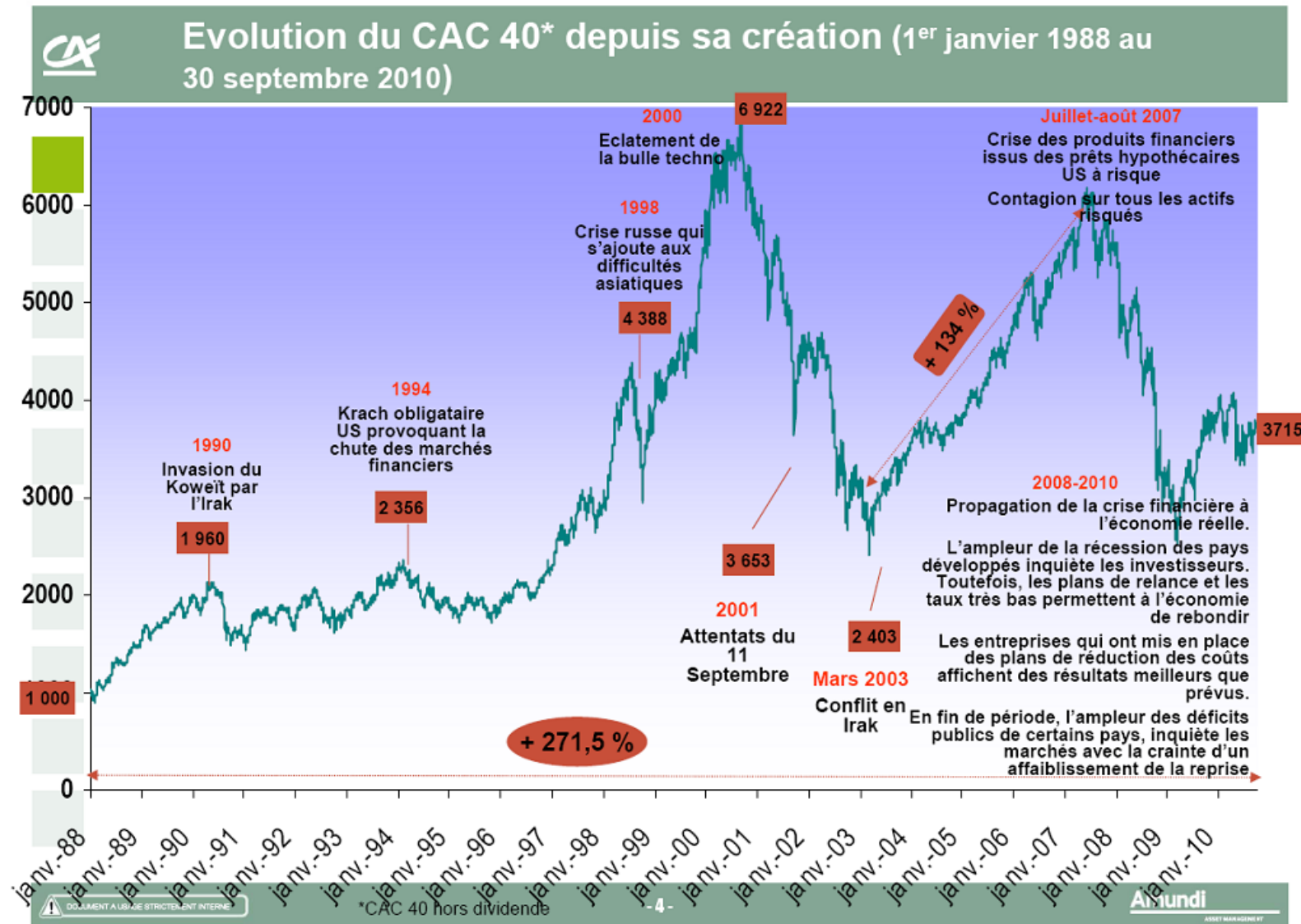
Avec $b(t)$ une variable aléatoire de distribution normale de valeur moyenne nulle et d'écart type 1



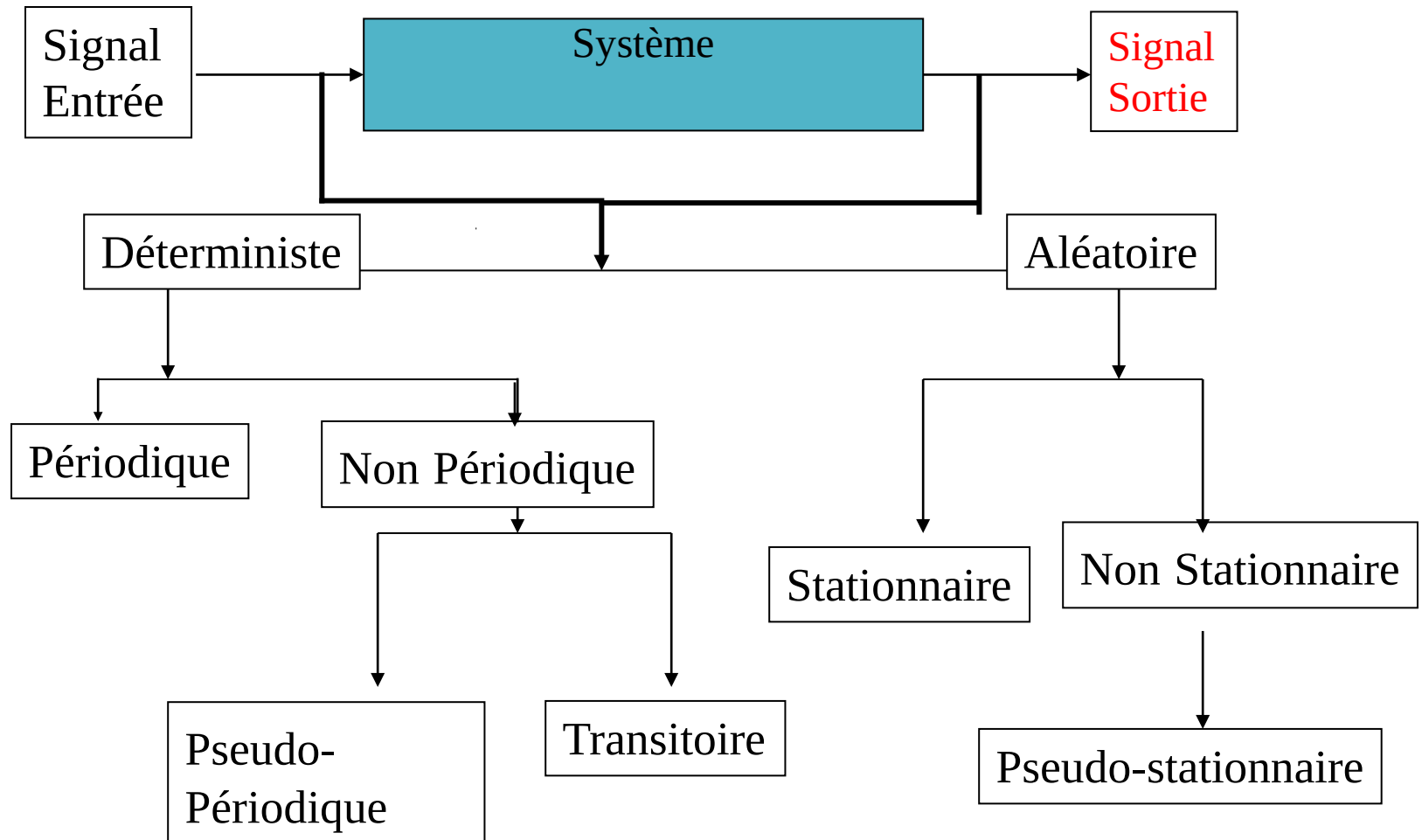
Classification des signaux

Représentation temporelle des signaux

CAC40 depuis sa création au 31/12/87



Classification des signaux

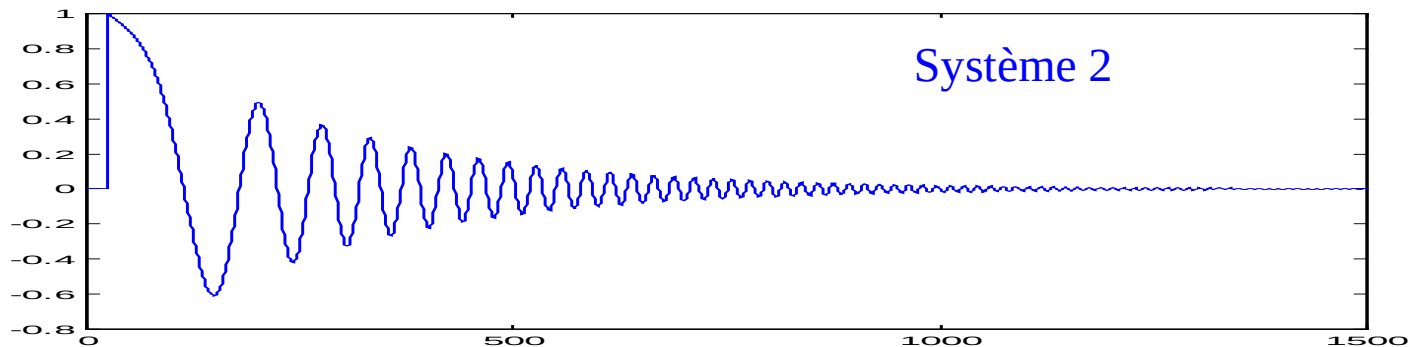
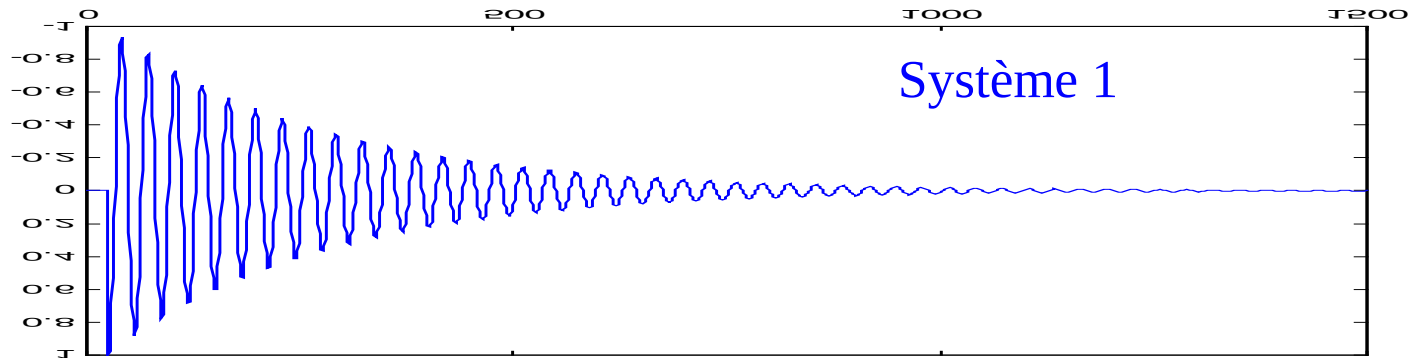


Classification des signaux

Signaux déterministes *NON* périodiques

■ Réponse d'un système à une impulsion

Système 1 $x(t) = A \sin \omega_1 t \cdot e^{-t/\tau}$



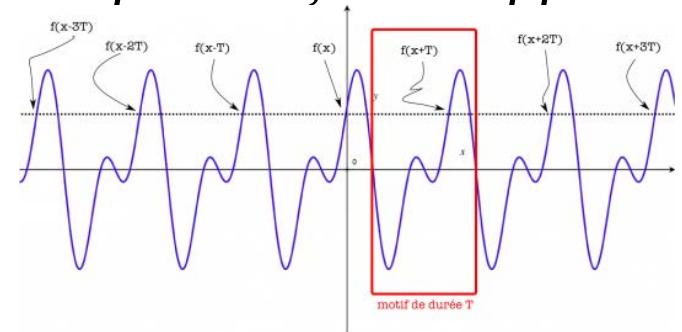
Système 2 $x(t) = A \cos \omega_2 t \cdot e^{-t/\tau}$

Signaux périodiques

Définition: Un signal $x(t)$ est périodique s'il existe un réel $T > 0$, tel que :

$$x(t) = x(t + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Si T est le plus petit réel satisfaisant cette équation, T est appelée période du signal

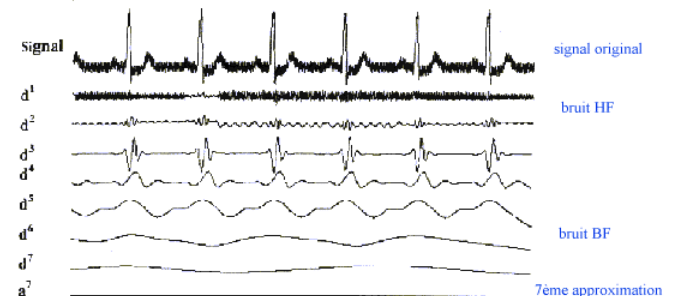


Signaux quasi périodiques

Définition: Les signaux quasi-périodiques sont produits par la somme ou le produit de signaux sinusoïdaux de périodes indénombrables, c'est-à-dire dont le rapport n'est pas rationnel.

Comme par exemple :

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right) \text{ avec } T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$$



Signaux

Déterministes et périodiques : caractéristiques

Exemple de caractéristiques à extraire des signaux déterministes

- Forme : sinus., carré, triangle...
- Valeurs max ou crête à crête...
- Moyenne $\overline{x(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$

- Valeur efficace

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt}$$

- La période

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{avec } T_0 \text{ période de la fonction}$$

- Les fréquences

En fréquentiel → fondamental + harmoniques

Coefficients de la décomposition en série de Fourier

Classification des signaux

signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

Stationnarité

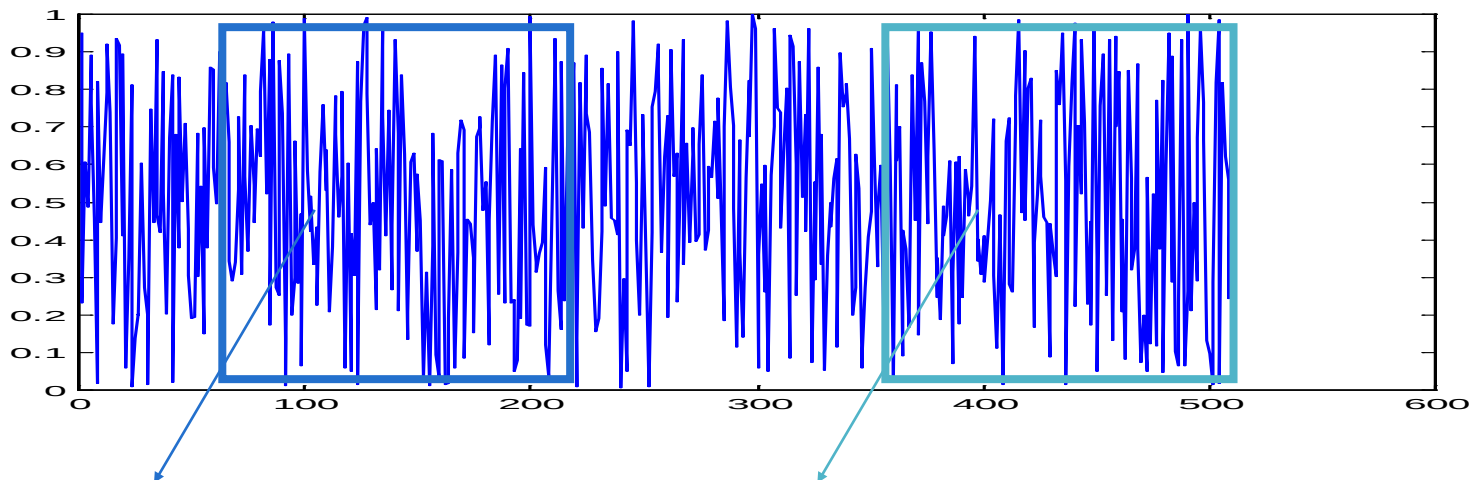
Toutes les propriétés statistiques du signal sont indépendantes du temps

→ Les moments sont les mêmes et ne dépendent pas de la fenêtre d'observation

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_i; \quad m_x(t_1) = m_x(t_2) = \dots = m_x(t_i)$$

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_i; \quad Var_x(t_1) = Var_x(t_2) = \dots = Var_x(t_i)$$

Exemple:



Observation 1: Moyenne $= m_1 = m_2$

Observation 2: Moyenne $= m_2 = m_1$

} Stationnarité
à l'ordre 1¹⁴

Remarque : On peut avoir des signaux stationnaires à l'ordre 1, 2, ..., n

Classification des signaux

signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

Définitions Un processus est dit **stationnaire au sens strict** si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T$, la loi du vecteur $\mathbf{X}_t = (X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_n})$ ne dépend pas de $t : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{E}$,

$$P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n) = P((X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_n}) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n). \quad (2.31)$$

Un processus X est dit **Stationnaire au Sens Large (SSL)**, ou encore stationnaire au second ordre, si les fonctions de moyenne et de covariance de X ne dépendent pas de t :

$$\begin{aligned} \forall t, \tau \in T, \quad m_X(t + \tau) &= m_X(t) \\ \forall t_1, t_2, \tau \in T, \quad R_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau) &= R_X(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$R_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Remarque

un processus stationnaire au sens strict l'est également au sens large.

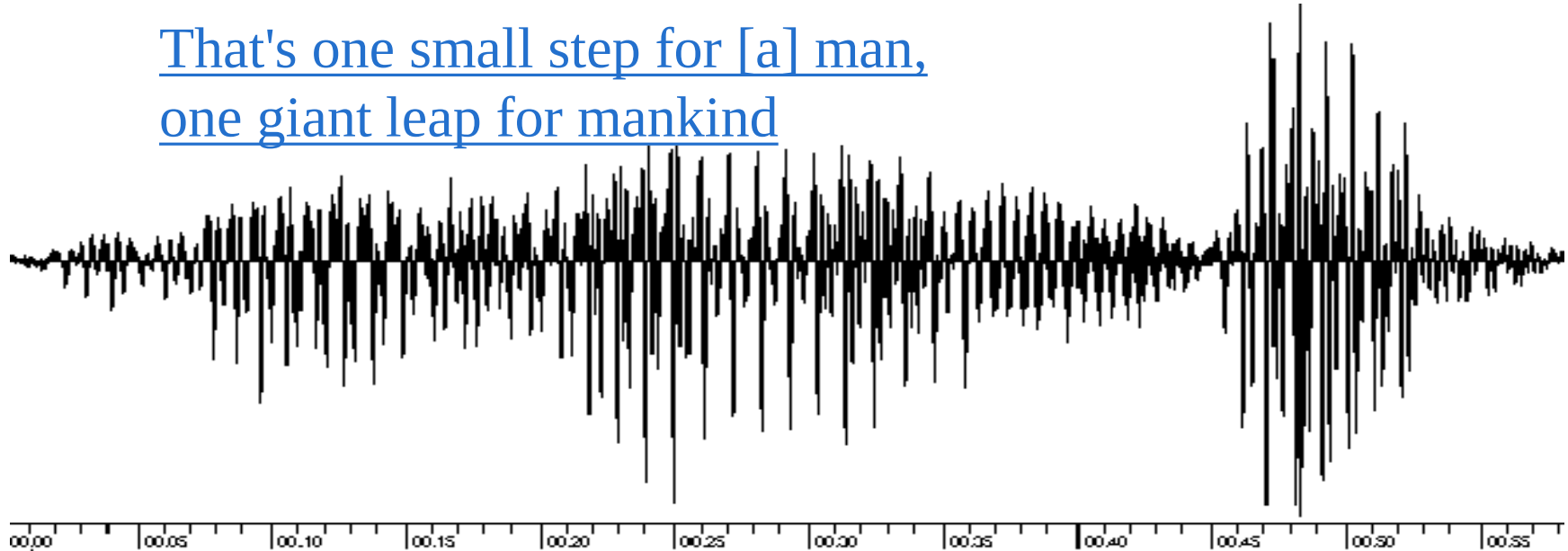
En fait, et de façon générale, les propriétés statistiques définies au sens strict sont plus fortes que les propriétés au sens large

Classification des signaux
Signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

Non Stationnaire

Exemple : la parole ???

That's one small step for [a] man,
one giant leap for mankind

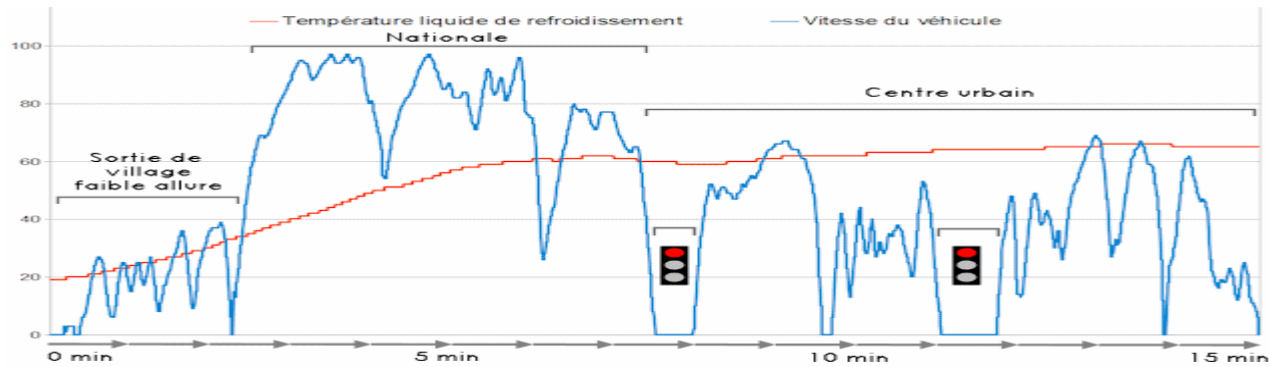


Classification des signaux

Signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

Non Stationnaire

Graphe de température en rouge, la courbe bleue indique la vitesse correspondante du véhicule en fonction du temps



Graphe de la température en rouge avec celle du régime moteur en fonction du temps en vert



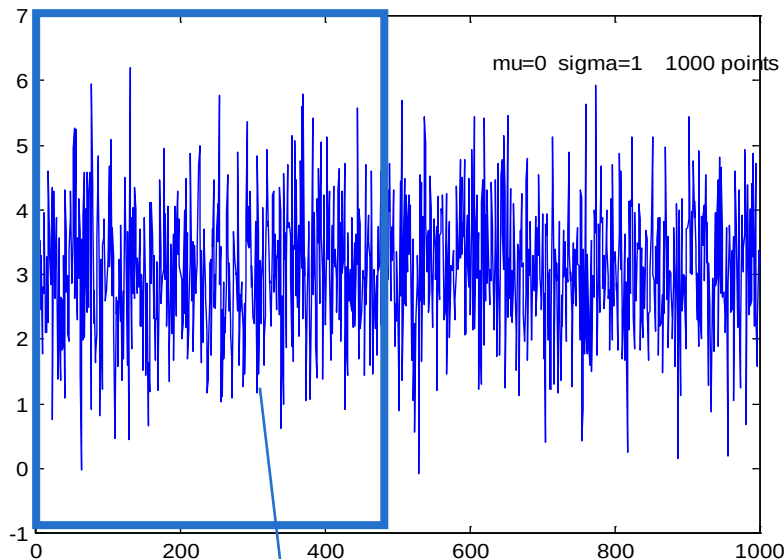
Classification des signaux

signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

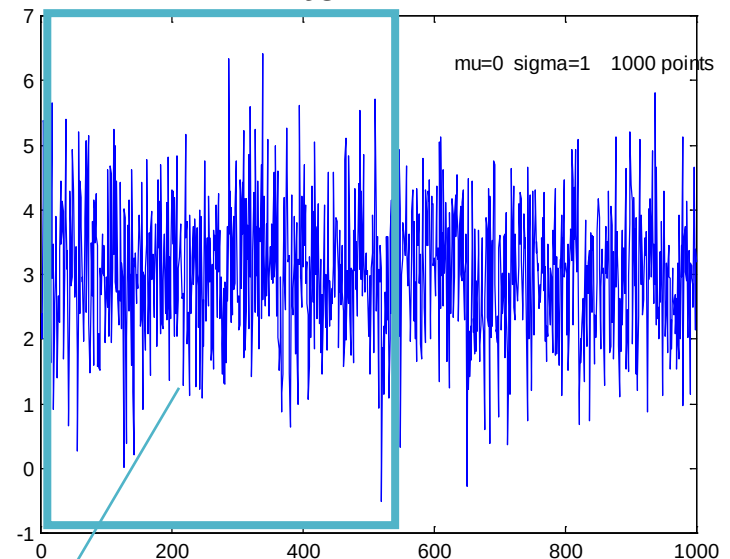
Ergodicité

Définition: Un processus est stationnaire et érgodique, si les moments calculés temporellement ou par moyenne d'ensemble (spatiale) sont égaux.

$$\forall t_0 \text{ et } \forall k; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t_0) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} X_k(t) dt$$



Réalisation 1: Moyenne $= m_1 = m_2$



Réalisation 2: Moyenne $= m_2 = m_1$

Remarques :

On peut avoir des signaux ergodique à l'ordre 1,2,..n

Classification des signaux

Signaux aléatoires : moyenne

Pour information

- Seules les propriétés statistiques (moyenne...) sont accessibles
- Moyenne : 2 types de moyennes → spatiales ou temporelles

Exemple moyenne spatiales : gestion du réseau EDF (RTE)

Soit $X_1(t)$ la variation de tension du réseau EDF par rapport à la tension nominale en un point .

→ En N points de la ville, on peut considérer $X_2(t)$, $X_3(t)$, ...
 $X_N(t)$ mesures possibles

Il est donc possible d'observer au même instant différentes variables aléatoires

Moyenne spatiale :

$$m_X(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} X_i(t_0)$$

Classification des signaux

Signaux aléatoires : moyenne

Exemple

Pour la production EDF, il est parfois plus intéressant d'observer les variations de la tension en un point du réseau au cours du temps.

Moyenne temporelle :
$$\langle X_i \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} X_i(t) \cdot dt$$

Les moyennes spatiales ou temporelles sont souvent appelées 'moments du premier ordre'

L'espérance mathématique représente la moyenne d'une variable pondérée par sa probabilité de se réaliser. Si X prend un nombre fini n de valeurs réelles : $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ alors

Cas d'une variable continue mesurable

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} X dP$$

Cas d'un nombre fini de variables discrètes

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$$

Classification des signaux

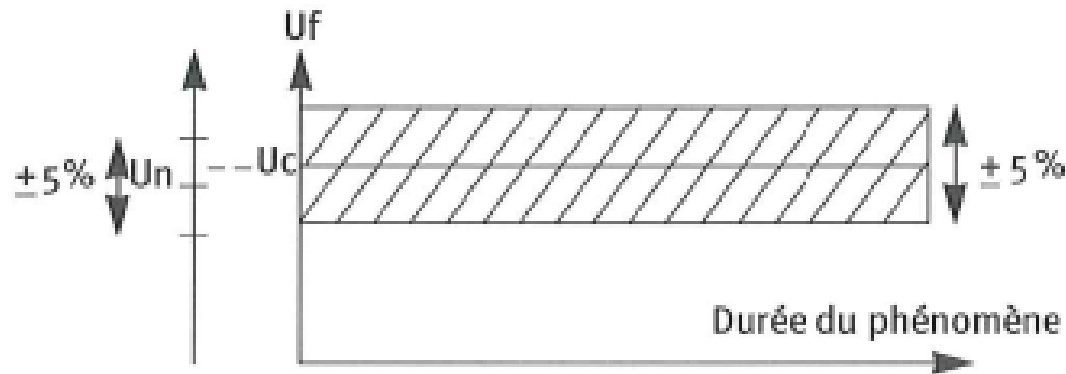
Signaux aléatoires : moyenne

Exemple

L'engagement d'EDF norme EN 50-160:

La valeur contractuelle de la tension U_c est située dans une plage de $\pm 5\%$ autour de la tension nominale U_n

La valeur efficace de la tension de fourniture U_f peut varier de $\pm 5\%$ autour de la valeur contractuelle U_c .



La valeur efficace de la tension est moyennée sur une durée de 10 minutes

Puissance et énergie d'un signal

Puissance et énergie d'un signal

En électricité

En électricité, on définit la puissance instantanée $p(t)$, dans un dipôle, comme le produit de la tension $v(t)$ par le courant $i(t)$ circulant dans le dipôle :

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Si le dipôle est une simple résistance R , à chaque instant t on a $v(t) = Ri(t)$, d'où l'expression:

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

L'énergie dissipée dans le dipôle entre deux instants t_1 et t_2 vaut alors :

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) dt$$

et la puissance moyenne sur l'intervalle est égale à :

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

Puissance et énergie d'un signal

Puissance d'un signal (par analogie à l'électricité)

Soit $x(t)$ un signal qui peut appartenir à l'ensemble des fonctions complexes ($x^*(t)$ est le conjugué de $x(t)$)

Puissance instantanée d'un signal $x(t)$:

$$p(t) = x(t) \cdot x^*(t)$$

Puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt$$

Si $x(t)$ est réel (cas des signaux physiques) :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 \cdot dt$$

Puissance et énergie d'un signal

Puissance d'un signal (par analogie à l'électricité)

Puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt$$

La valeur efficace X_{eff} du signal $x(t)$ est égale à :

$$X_{eff} = \sqrt{P(t_0, T)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 \cdot dt}$$

Cas des signaux complexes:

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Cas des signaux périodique: $P(t_0, T) = P(t_0, nT)$

Avec T la période du signal

Puissance et énergie d'un signal

Energie d'un signal

L'énergie totale d'un signal $x(t)$ est définie comme l'intégrale de sa puissance dans tout son domaine d'existence :

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 .dt$$

- Il faut distinguer les signaux à énergie finie ou infinie
- Ils sont finis si l'intégrale converge*
- S'ils ne sont pas à énergie finie, on utilise alors la puissance moyenne pour les caractériser.

Par exemple $s(t) = A \sin \omega t$ pour $t \in \mathbb{R}$ est à énergie infinie
→ mais on peut calculer sa puissance moyenne

Puissance et énergie d'un signal

En résumé: Énergie et puissance d'un signal réel

Définition: par analogie avec les signaux électriques

	<i>Temps Continu</i>	<i>Temps Discret</i>
<i>Energie</i>	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) ^2$
<i>Puissance moyenne</i>	$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) ^2 dt$	$P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) ^2$

3 Classes de signaux:

- Signaux à **Énergie finie**
- Signaux à **Puissance moyenne finie**
- Signaux à Énergie et Puissance moyenne infinies

Notion de représentation d'un signal

Exemple d'un signal à énergie finie :

Pour les signaux à énergie finie (intégrale convergente de $x(t)$): $x = e^{-|t|} = \exp(-\text{abs}(t))$

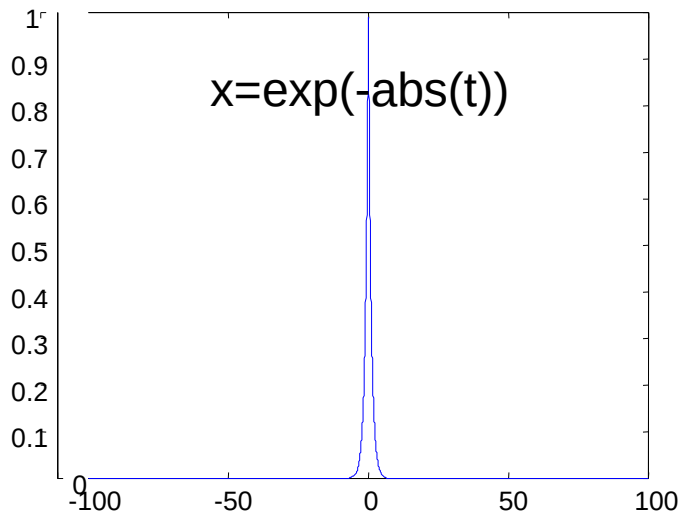
• Énergie $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|t|}|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 1$

$$E(x) = 2 \int_0^{+100} e^{-2t} dt = [-e^{-200} + 1] \approx 1$$

$$E(x)[-100, +100] \approx 1$$

$$E(x)[-10, +10] \approx 0,999$$

$$E(x)[-1, +1] \approx 0,864$$



99,9% de
E est
conservée



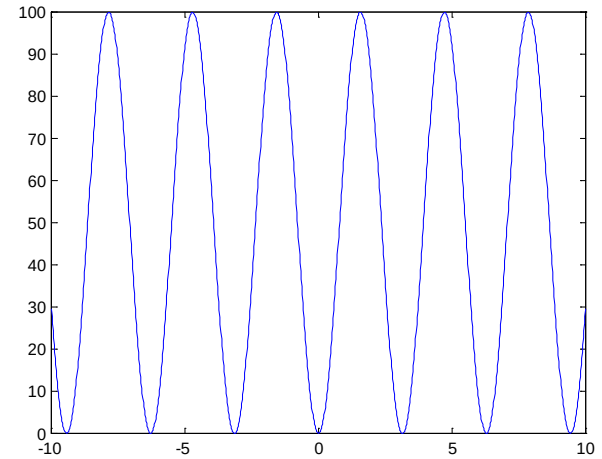
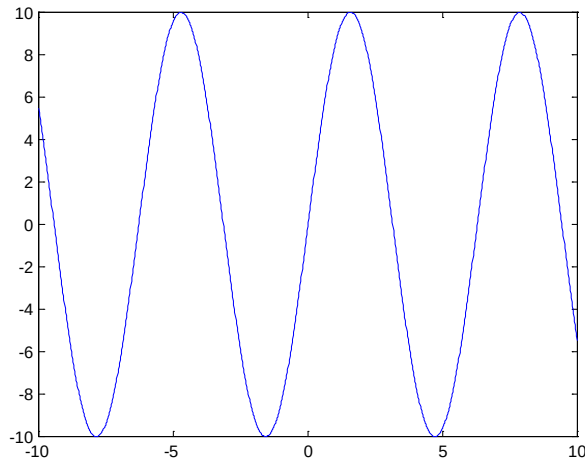
86,4% de
E est
conservée

Notion de représentation d'un signal

Exemple d'un signal à énergie infinie et à puissance finie :

Pour les signaux qui ne sont pas à énergie finie, ils sont caractérisés par leur puissance moyenne :

• Puissance
$$P_T(x,t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} |x(t)|^2 dt$$



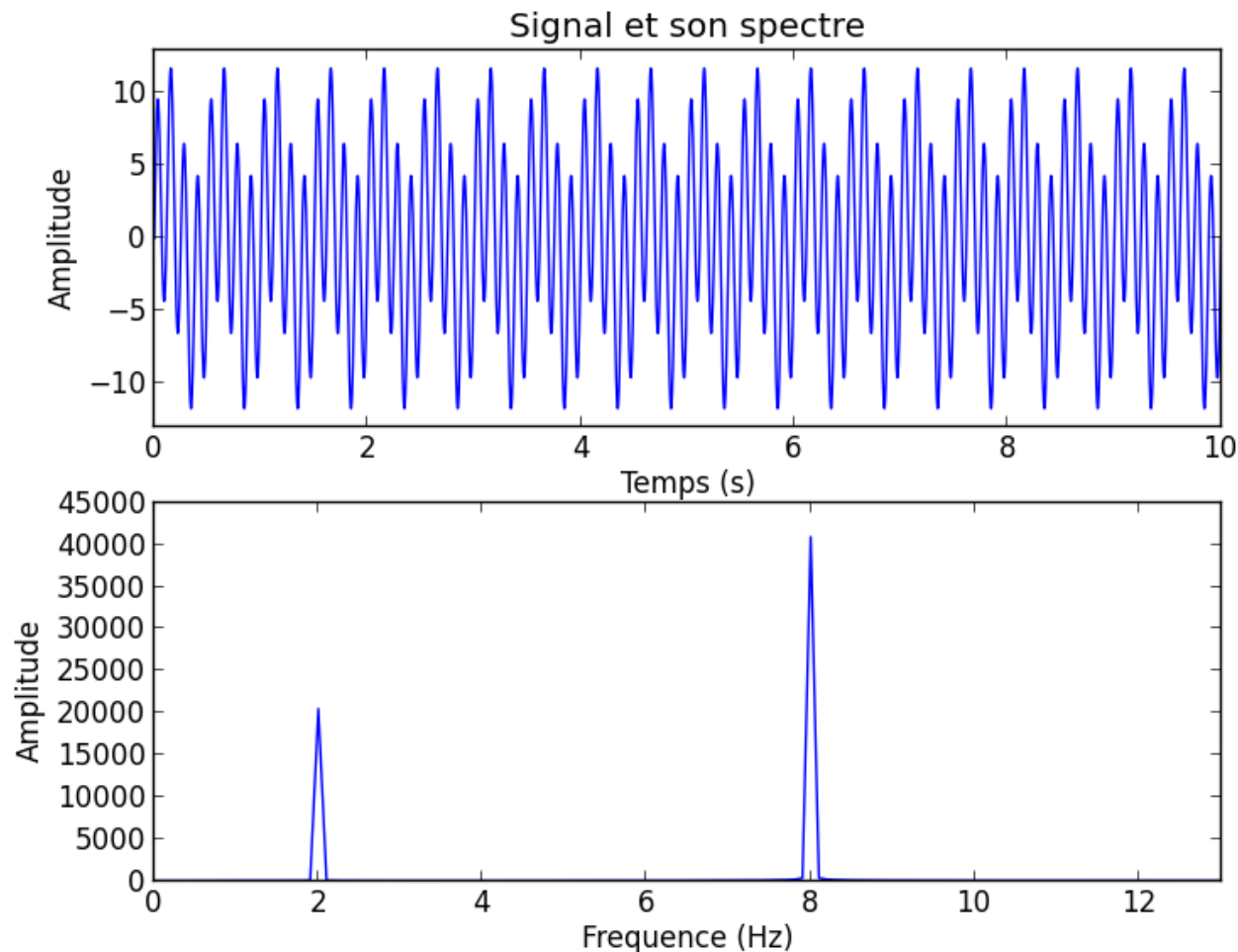
Sous sa forme analytique $\sin \omega t$ n'est pas à énergie finie pour tout son domaine d'existence $t \in [-\infty, +\infty]$

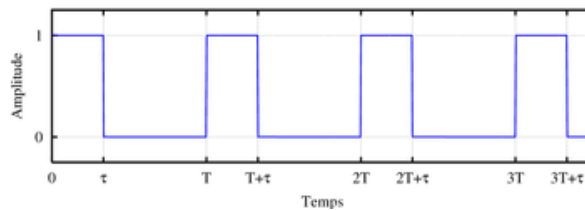
$$x(t) = 10 \sin(\omega t) \rightarrow P(x,t) = \frac{100}{T} \int_0^T |\sin \omega t|^2 dt = \frac{100}{2.T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T = 50$$

Notion de représentation d'un signal

Exemple d'un signal à énergie infinie et à puissance finie :

Pour les signaux qui ne sont pas à énergie finie, ils sont caractérisés par leur puissance moyenne .





Exercice 1

- Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal carré, compris entre 0 et 5V, de rapport cyclique 1/2.

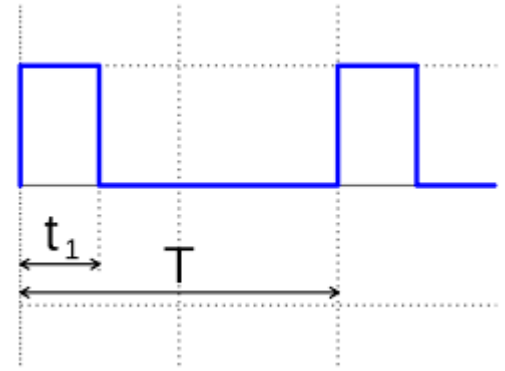
Valeur moyenne

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 5 dt = \frac{5}{T} [t]_0^{T/2} = \frac{5}{T} \times \frac{T}{2} = 2,5V$$

Valeur efficace

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 25 dt = \frac{25}{T} [t]_0^{T/2} = \frac{25}{T} \times \frac{T}{2} = 12,5V^2$$

$$S_{\text{eff}} \approx 3,5V$$



Exercice 2

- Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal carré, compris entre 0 et 5V, de rapport cyclique 1/3.

Valeur moyenne

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/3} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/3} 5 dt = \frac{5}{T} [t]_0^{T/3} = \frac{5}{T} \times \frac{T}{3} \approx 1,66V$$

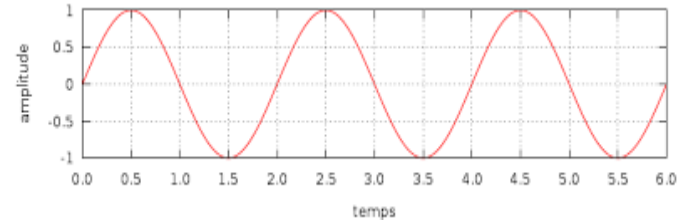
Valeur efficace

$$S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/3} s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/3} 25 dt = \frac{25}{T} [t]_0^{T/3} = \frac{25}{T} \times \frac{T}{3} = 8,33V^2$$

$$S_{\text{eff}} \approx 2,9V$$

Exercice 3

- Calculer la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal d'amplitude A , défini par $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- Calculer la valeur efficace de ce signal.

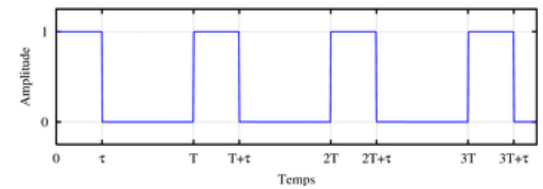


Valeur moyenne

$$\begin{aligned} S_{\text{moy}} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\ &= \frac{A}{T\omega} [\sin(\omega T + \varphi) - \sin(0 + \varphi)] = \frac{A}{T\omega} [\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)] = \frac{A}{T\omega} [\sin(\varphi) - \sin(\varphi)] = 0 \end{aligned}$$

Valeur efficace

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\ S_{\text{eff}}^2 &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T 1 + \cos(2\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2T} \left\{ \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \right\} = \frac{A^2}{2T} \left\{ [t]_0^T + \left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{2\omega} \right]_0^T \right\} \\ &= \frac{A^2}{2T} \left\{ T + \left[\frac{\sin(2\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega} \right] \right\} = \frac{A^2}{2T} \left\{ T + \left[\frac{\sin(\varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega} \right] \right\} = \frac{A^2}{2} \\ S_{\text{eff}} &= \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



Exercice 4

Soit $x(t)$ un signal carré logique TTL (état bas : 0V ; état haut : 5V) de rapport cyclique 1/2 et de période $T=0,1s$.

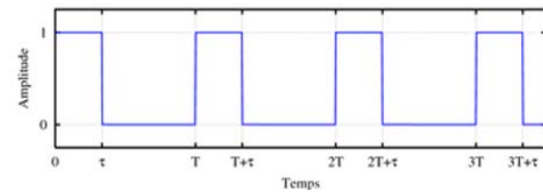
- 1) Calculer son énergie sur une période. En déduire son énergie totale.
- 2) Calculer sa puissance totale et sa puissance moyenne.
- 3) En déduire sa valeur efficace.

Son énergie sur une période est définie par :

$$E_T = \int_0^T x^2(t) dt = \int_0^{T/2} x^2(t) dt = \int_0^{T/2} 25 dt = 25[t]_0^{T/2} = \frac{25 \times T}{2} = 12,5 \times T = 1,25 \text{ Joule}$$

Son énergie totale est égale à :

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = 25[t]_{-\infty}^{\infty} = 25[\infty + \infty] = \infty$$



Exercice 4

Soit $x(t)$ un signal carré logique TTL (état bas : 0V ; état haut : 5V) de rapport cyclique 1/2 et de période $T=0,1s$.

- 1) Calculer son énergie sur une période. En déduire son énergie totale.
- 2) Calculer sa puissance totale et sa puissance moyenne.
- 3) En déduire sa valeur efficace.

La puissance moyenne totale est identique à la puissance calculée sur une période, définie par :

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 25 dt = \frac{25}{T} [t]_0^{T/2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ Watts}$$

La valeur efficace est la racine carrée de la puissance (calculée sur une période, ou totale) :

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{12,5} = 3,53 \text{ Volt}$$