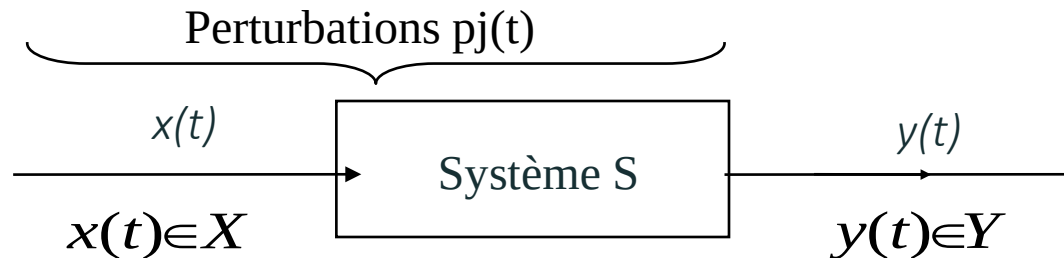


Les Systèmes linéaires et invariants par translation

Les systèmes

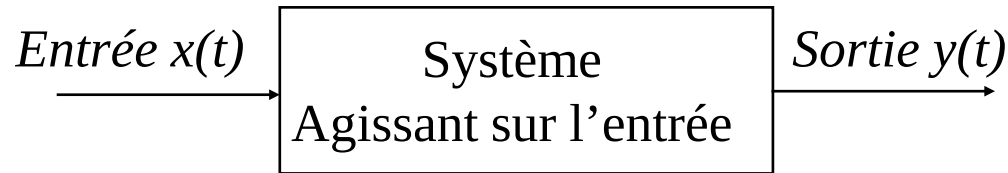
Un système dynamique est un ensemble d'éléments destinés à remplir une fonction physique



- $x(t)$ contient les variables $x_i(t)$ d'entrées
 - Les perturbations $p_j(t)$ peuvent agir sur le système ou sur les signaux
 - $y(t)$ peut contenir plusieurs variables $y_i(t)$ de sorties
- X et Y sont les ensembles des valeurs d'entrées et sorties

Propriété = Causalité : **Un système est causal** si sa sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $x(t)$ pour $t \leq t_0$

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps



Un système S est dit linéaire et invariant par translation (SLIT), s'il possède les propriétés suivantes:

- **Linéarité (sous conditions initiales identiques)**

si $S: x(t) \rightarrow y(t)$ alors $S: kx(t) \rightarrow ky(t)$

ou si $S: x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ et $S: x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

alors $S: \alpha.x_1(t) + \beta.x_2(t) \rightarrow \alpha.y_1(t) + \beta.y_2(t)$

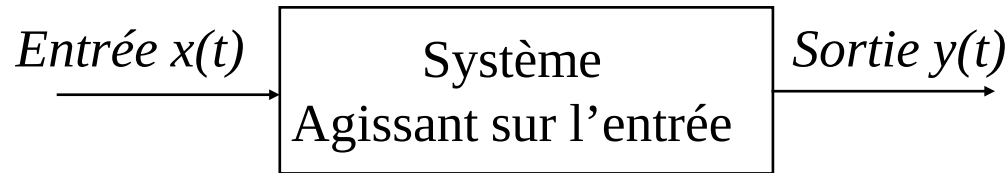
Cette propriété a pour conséquence le principe de superposition

- **Invariance par translation,**

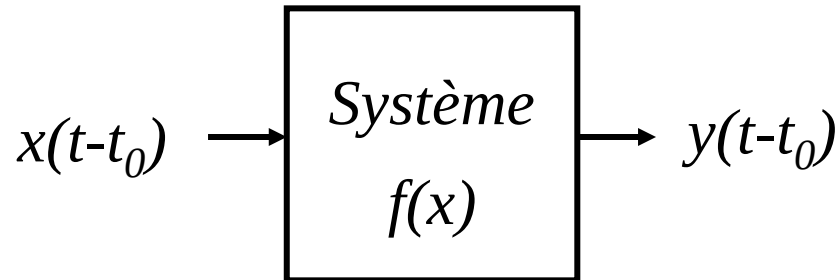
Soit l'opérateur de translation $Z\tau$ de $X \rightarrow X$ tel que

$Z\tau(x(t)) = x(t-\tau)$ alors à $Z\tau(x(t)) \rightarrow Z\tau(y(t)) = y(t-\tau)$

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps

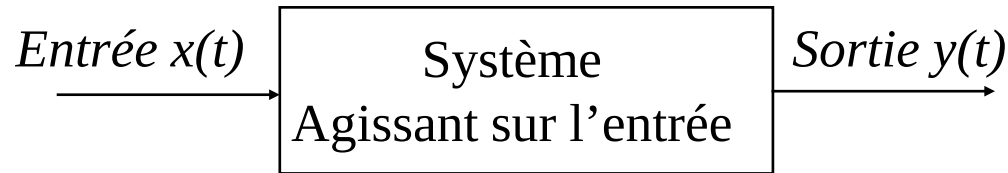


• Invariance



- ▶ Un système à temps invariant a un modèle identique à tout instant (un retard τ ne change pas la loi du modèle)
- ▶ Pour un système invariant, l'origine des coordonnées est sans importance vis-à-vis des propriétés du système

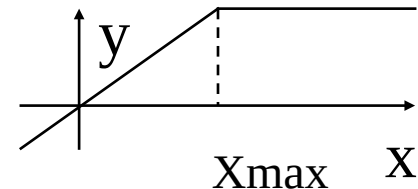
Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps



Exemples :

- $y(t) = A \cdot x(t)$ avec $A = \text{cste}$ pour $x < X_{\max}$
 $y(t) = A \cdot x_{\max}$ pour $x \geq X_{\max}$

Une saturation et/ou un hystérésis entraînent la non linéarité d'un système dans l'intervalle $[X_{\max}, \infty[$



- L'invariance par translation signifie que la relation d'entrée-sortie n'est pas modifiée dans le temps

Par exemple : Les systèmes ne sont plus invariants dans le temps quand les caractéristiques des composants se modifient avec leur vieillissement

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps

Définition 1:

On appelle modèle d'un système (ou d'un processus) la loi qui relie l'entrée (cause) à la sortie (effet)

Définition 2:

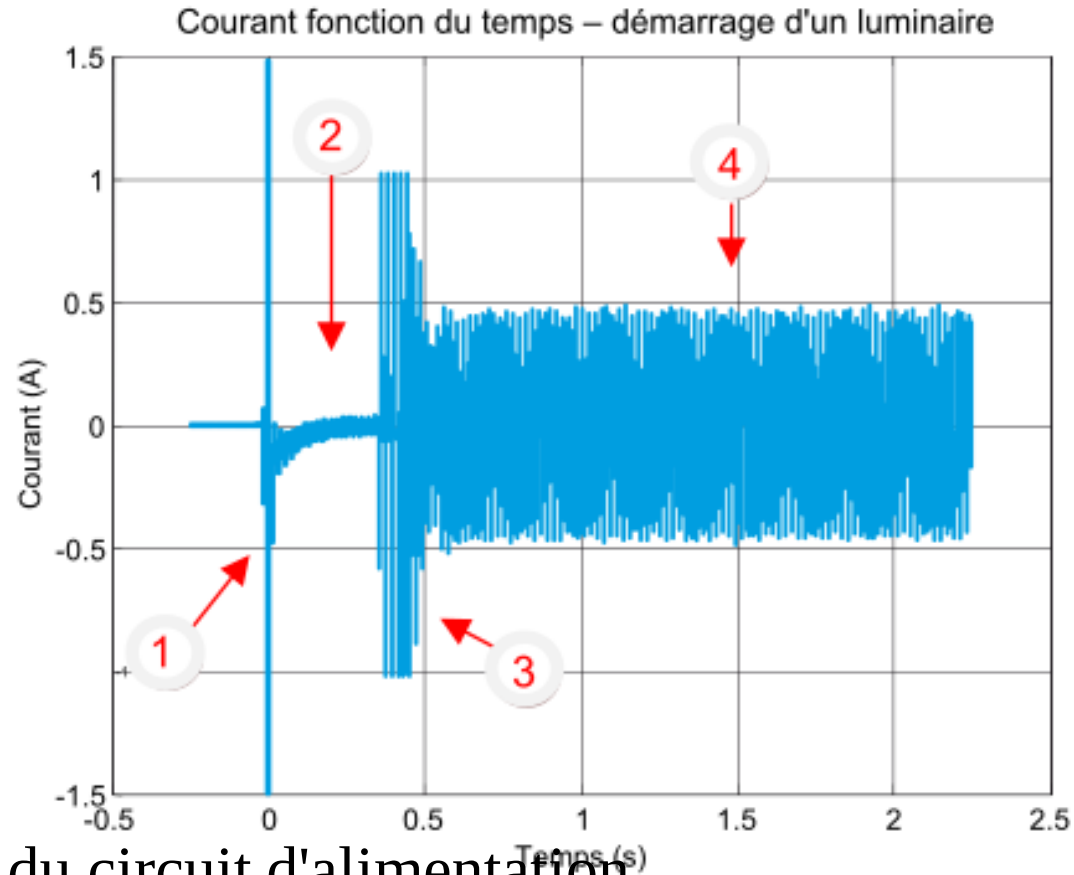
On distingue deux régimes dans le comportement des systèmes:

- Le régime permanent ou établi caractérisé par la réponse stabilisée du système à une entrée quelconque
- Le régime transitoire caractérisé par l'évolution de la réponse avant que le régime permanent ne soit atteint.
- *Le régime statique est le régime permanent dans le cas où l'entrée est une constante*

Ce cours traite des systèmes causaux, linéaires et invariants : les S.L.I.T.. Les systèmes étudiés sont continus, leurs signaux d'entrée et de sortie sont continus

La relation qui lie leur entrée et leur sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Illustration des quatre étapes à la mise sous tension d'un luminaire à LED



Etape 1 : Charge du circuit d'alimentation,

Etape 2 : Démarrage du convertisseur,

Etape 3 : Alimentation du module LED,

Etape 4 : Régime permanent

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Théorème : Si le système S est causal, linéaire et invariant par translation SLIT, il est dit '*lisse*', il satisfait une équation différentielle à coefficients constants

Donc les SLIT d'entrée x et de sortie y peuvent s'écrire sous la forme :

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 \cdot x + b_1 \cdot \frac{d x}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + b_q \cdot \frac{d^q x}{dt^q}$$

Remarque : En électronique les systèmes sont plutôt définis sous forme de relation d'entrées- sorties donc de type transfert
En automatique, x et y peuvent être des variables internes (variables d'états)

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Opérateur de transfert

En appliquant la règle du calcul symbolique : $\frac{dx}{dt} \rightarrow pX$
Le calcul symbolique: les formules mathématiques peuvent être combinées par des opérateurs (algébriques, analytiques), éventuellement simplifiés. Cela implique la conservation de toutes les propriétés dans chacune des écritures (Isomorphisme)

Hypothèse de travail : régime permanent et mêmes conditions initiales

L'équation différentielle :

$$a_0.y + a_1.\dot{y} + a_2.\ddot{y} + \dots + a_n.y^{(n)} = b_0.x + b_1.\dot{x} + b_2.\ddot{x} + \dots + b_q.x^{(q)}$$

Devient en calcul symbolique une fonction algébrique :

$$a_0.Y + a_1.pY + a_2.p^2Y + \dots + a_n.p^nY = b_0.X + b_1.pX + b_2.p^2X + \dots + b_q.p^qX$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Opérateur de transfert

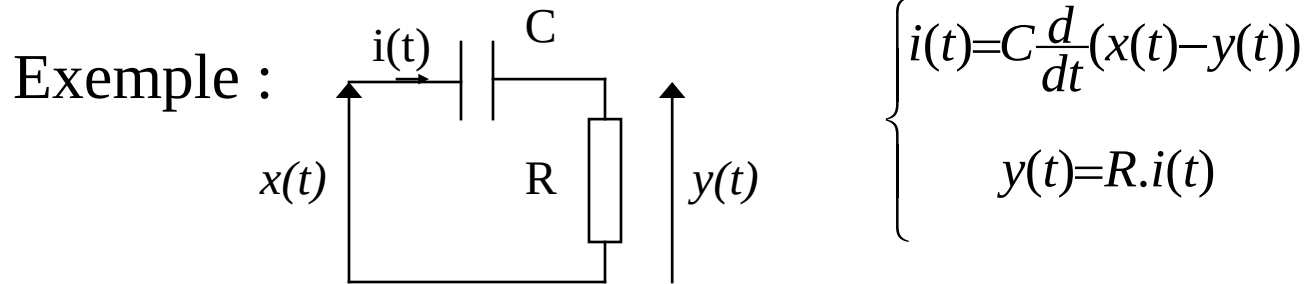
$$a_0.Y + a_1.pY + a_2.p^2Y + \dots + a_n.p^nY = b_0.X + b_1.pX + b_2.p^2X + \dots + b_q.p^qX$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^n a_j \cdot p^j} = H(p)$$

$H(p)$ est appelée
fonction de transfert du système

A quoi correspond cette fonction de transfert ?
Comment interpréter ces effets ???

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps



Équation différentielle du système :

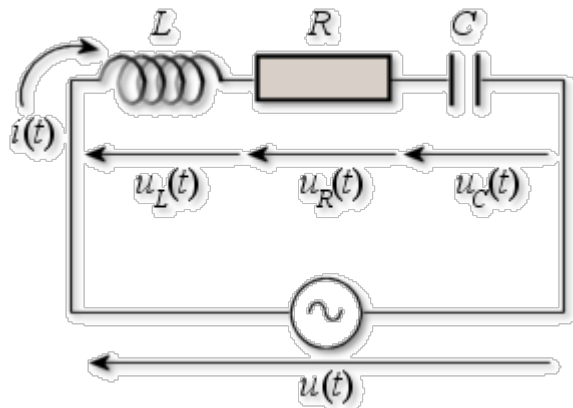
$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = RC \frac{d}{dt} x(t)$$

si $x(t) = \text{cste}$ alors $y(t) = y_o + k e^{-\frac{t}{RC}}$

Contre exemple si la valeur de la résistance R évolue au cours du temps le système n'est plus un SLIT

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps

Exemple 1



$$u_L + u_R + u_C = u$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \cos \Omega t$$

en dérivant par rapport à t et en divisant par L , l'équation en intensité :

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{LC} i(t) = -\frac{\Omega U_m}{L} \sin \Omega t = \frac{\Omega U_m}{L} \cos \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

équation par rapport à la charge instantanée $q(t)$ du condensateur, en rappelant que $i(t) = q'(t)$

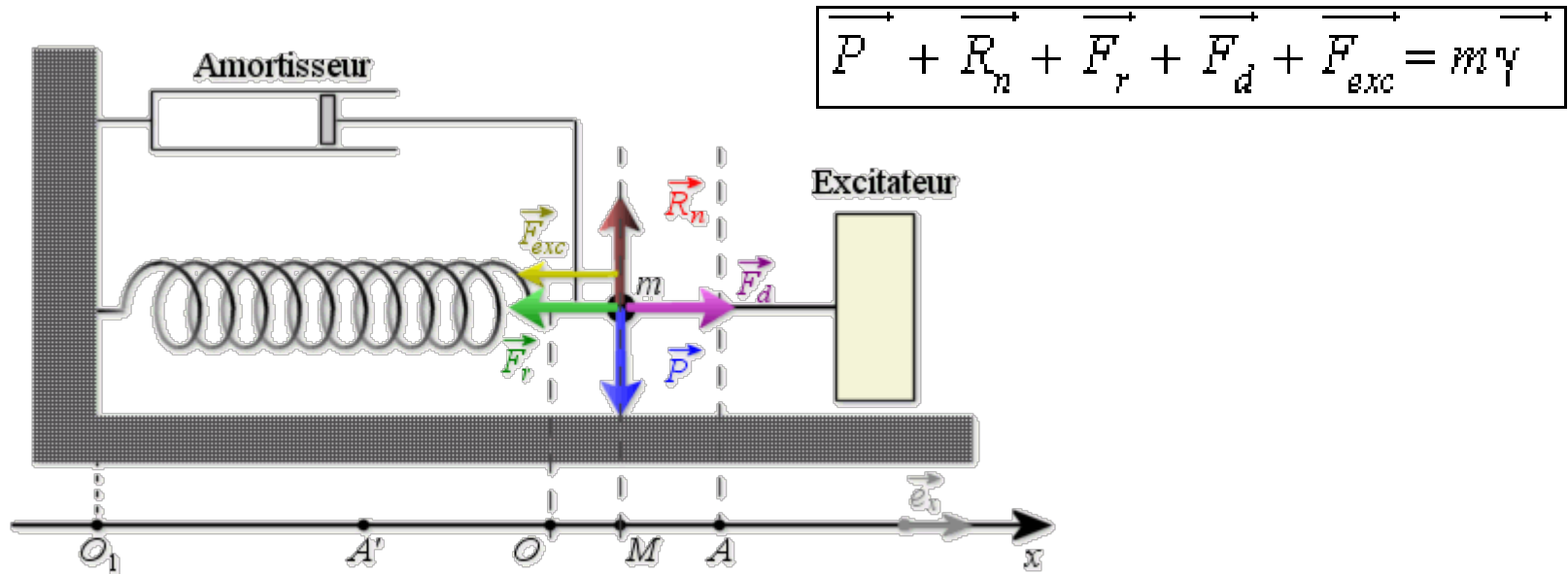
$$q''(t) + \frac{R}{L} q'(t) + \frac{1}{LC} q(t) = \frac{U_m}{L} \cos \Omega t$$

l'équation par rapport à la d.d.p. aux bornes du condensateur $u_C(t)$, en rappelant que $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$

$$u_C''(t) + \frac{R}{L} u_C'(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{U_m}{LC} \cos \Omega t$$

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps

Exemple 2



En projetant l'équation vectorielle sur la direction e_x et en utilisant les notations habituelles (k , μ , position d'équilibre O et A), on obtient l'équation différentielle décrivant les oscillations de m :

$$x'' + \frac{\mu}{m} x' + \frac{k}{m} x = \frac{F_m}{m} \cos \Omega t$$

Réponse Impulsionnelle Convolution et Fonction de transfert

L'impulsion de Dirac

Dans la façon usuelle de définir une intégrale (par exemple l'intégrale de Lebesgue), si f est une fonction telle que :

$$f(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ alors } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$$

Or la modélisation de sources ponctuelles (densité de charges électriques, de masse...) nécessite un formalisme tel que:

Soit une fonction qui vaut 0 en tout point $x \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ avec } \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

En généralisant la notion de fonction cet objet existe:
Fonctions généralisées ou distributions

L'impulsion de Dirac

La fonction de Dirac δ est un élargissement du concept des fonctions en mathématique c'est une distribution (L. Schwartz). Elle a été inventée pour l'analyse de source ponctuelle (charges électriques, masse....)

La distribution $\delta(t)$ peut être considérée comme la limite d'une impulsion de durée Δt et de hauteur $1/\Delta t$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

La distribution $\delta(t)$ est utilisée pour localiser la valeur d'une fonction f

Si $f(t)$ est une fonction continue on a :

$$\langle f(t), \delta(t) \rangle = f(0)$$

$$\langle f(t), \delta(t-\tau) \rangle = f(\tau)$$

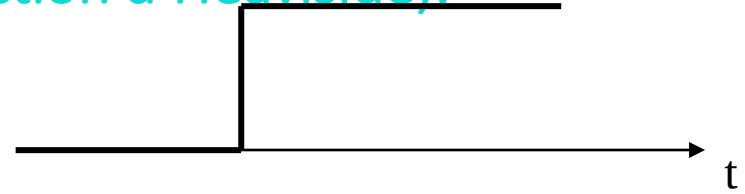
Si $f(t) = 1$

$$\langle 1, \delta(t-\tau) \rangle = 1 \text{ pour } t=\tau \text{ et } 0 \text{ ailleurs}$$

L'impulsion de Dirac

Si l'entrée est un échelon unité (fonction d'Heaviside):

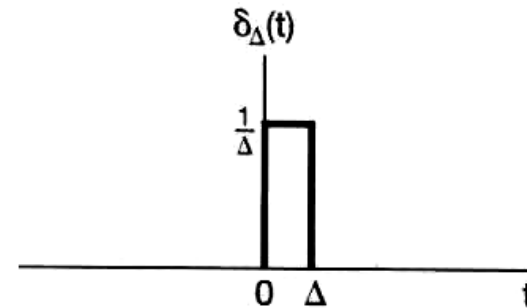
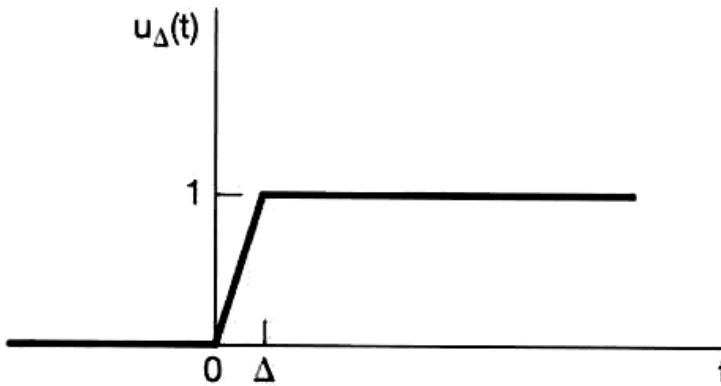
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



Comment modéliser la discontinuité ?

Impulsion Unité ou Dirac:

On veut: $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ Problème!...



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac

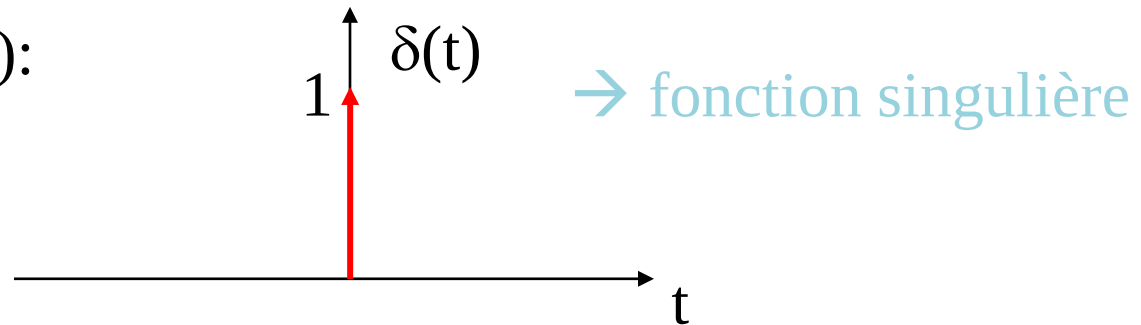
Propriétés du Dirac:

Modélisation mathématique issue de la théorie des Distributions
(Laurent Schwartz)...

- $\delta(t)$ n'a pas de durée, sa hauteur est infinie et **son aire est égale à 1**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- représentation de $\delta(t)$:



Besoin des physiciens:

$\delta(t)$ modélise des sources très ponctuelles

- $\delta(t)$ peut être pondéré par un scalaire

$\Rightarrow k \cdot \delta(t)$ a une aire de k



Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

L'impulsion de Dirac

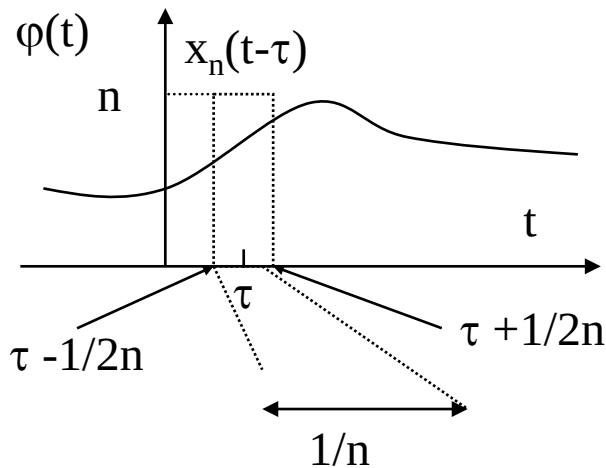
Pour mieux comprendre

$$\langle \varphi(t), \delta(t-\tau) \rangle = \varphi(\tau)$$

Avec φ fonction à support compact et indéfiniment dérivable: $\varphi \in D$

Approche triviale:

Soit une impulsion physiquement réalisable: une fonction porte à support très compact



$$\langle \varphi, x_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) x_n(t-\tau) \cdot dt = n \int_{\tau - \frac{1}{2n}}^{\tau + \frac{1}{2n}} \varphi(t) dt$$

Pour des fonction continues classiques

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\tau - \frac{1}{2n}}^{\tau + \frac{1}{2n}} \varphi(t) dt \Rightarrow \text{Forme indéterminée}$$



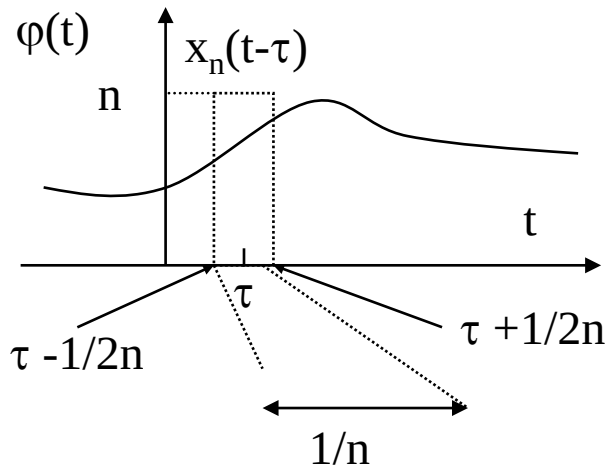
Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

L'impulsion de Dirac

Approche triviale:

Pour mieux comprendre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\tau}^{\tau + \frac{1}{n}} \varphi(t) dt \Rightarrow \text{Forme indéterminée}$$



Théorème de la moyenne: si φ est intégrable sur $[a, b]$ et si l'on pose

$$m = \inf_{[a, b]} [\varphi(t)] \text{ et } M = \sup_{[a, b]} [\varphi(t)]$$

$$\text{Alors } m(b-a) \leq \int_a^b \varphi(t) dt \leq M(b-a)$$

Dans notre cas si $m = \inf_{[\tau - \frac{1}{2n}, \tau + \frac{1}{2n}]} [\varphi(t)]$ et $M = \sup_{[\tau - \frac{1}{2n}, \tau + \frac{1}{2n}]} [\varphi(t)]$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} m = M = \varphi(\tau)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) x_n(t - \tau) \cdot dt = \varphi(\tau)$$

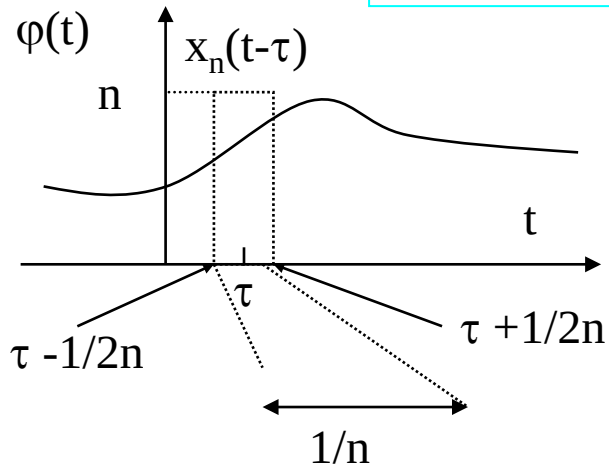


Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

L'impulsion de Dirac

Pour mieux
comprendre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) x_n(t-\tau) dt = \varphi(\tau)$$



$$\text{et } x(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta(t)$$

$$\langle \varphi(t), \delta(t-\tau) \rangle = \varphi(\tau)$$

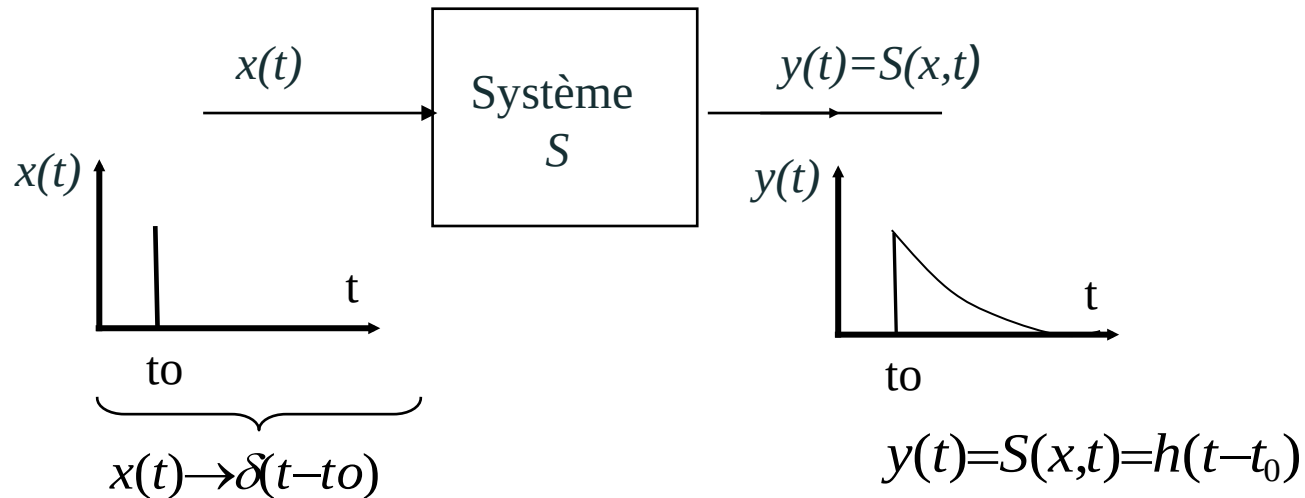
$\delta(x)$ associe par le produit scalaire à chaque fonction continue $\rightarrow$ un scalaire cad un nombre.

Cette idée est à la base de la théorie des distributions.

Réponse impulsionnelle des systèmes

Définition : la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système S est la sortie du système $y(t)$ lorsque l'on impose à l'entrée une impulsion de Dirac δ

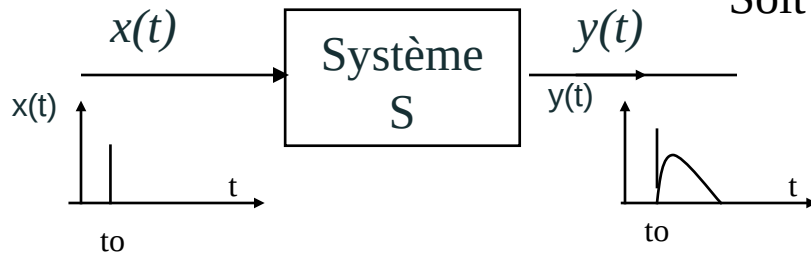


Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Équation de convolution

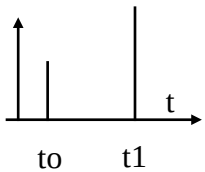
$$y(t) = S(x; t)$$

Soit $h(\delta, t)$ la réponse impulsionnelle du système S

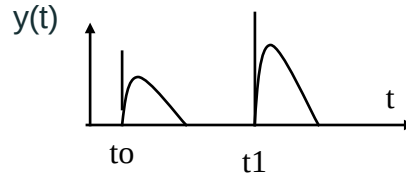


S est invariant

$$x(t) = \delta(t_0, t) \longrightarrow y(t) = S(\delta(t_0, t); t) = h(t - t_0)$$



$$x(t) = \alpha \cdot \delta(t_0, t) + \beta \cdot \delta(t_1, t)$$



S est linéaire

$$y(t) = \alpha \cdot S(\delta(t_0, t); t) + \beta \cdot S(\delta(t_1, t); t)$$

$$y(t) = \alpha \cdot h(t - t_0) + \beta \cdot h(t - t_1)$$

Si $x(t)$ est une fonction continue, le résultat se généralise

$\forall x(t), \text{continue}$

$$y(t) = S(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot h(t - u) du$$

23

Ce résultat est appelé produit de convolution

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Produit de convolution

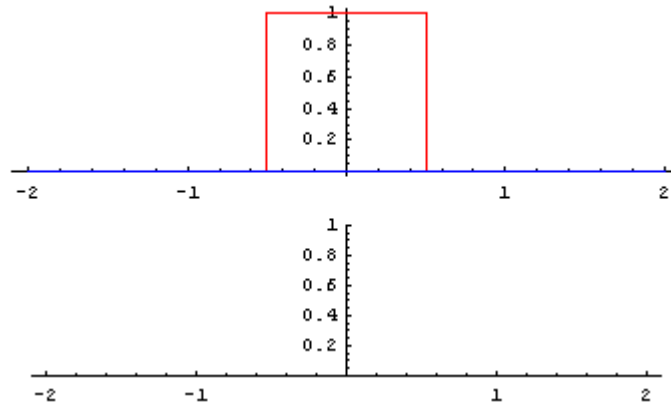
Ce résultat se généralise alors à un signal quelconque $x(t)$ grâce à sa décomposition :

$$y(t) = S(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot h(t-u) du$$



La sortie d'un système LIT est le résultat de la convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle du système

Tout SLIT est donc caractérisé par sa réponse impulsionnelle



Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Produit de convolution

Exemple de calcul :

$$y(t)=S(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(u).h(t-u)du$$

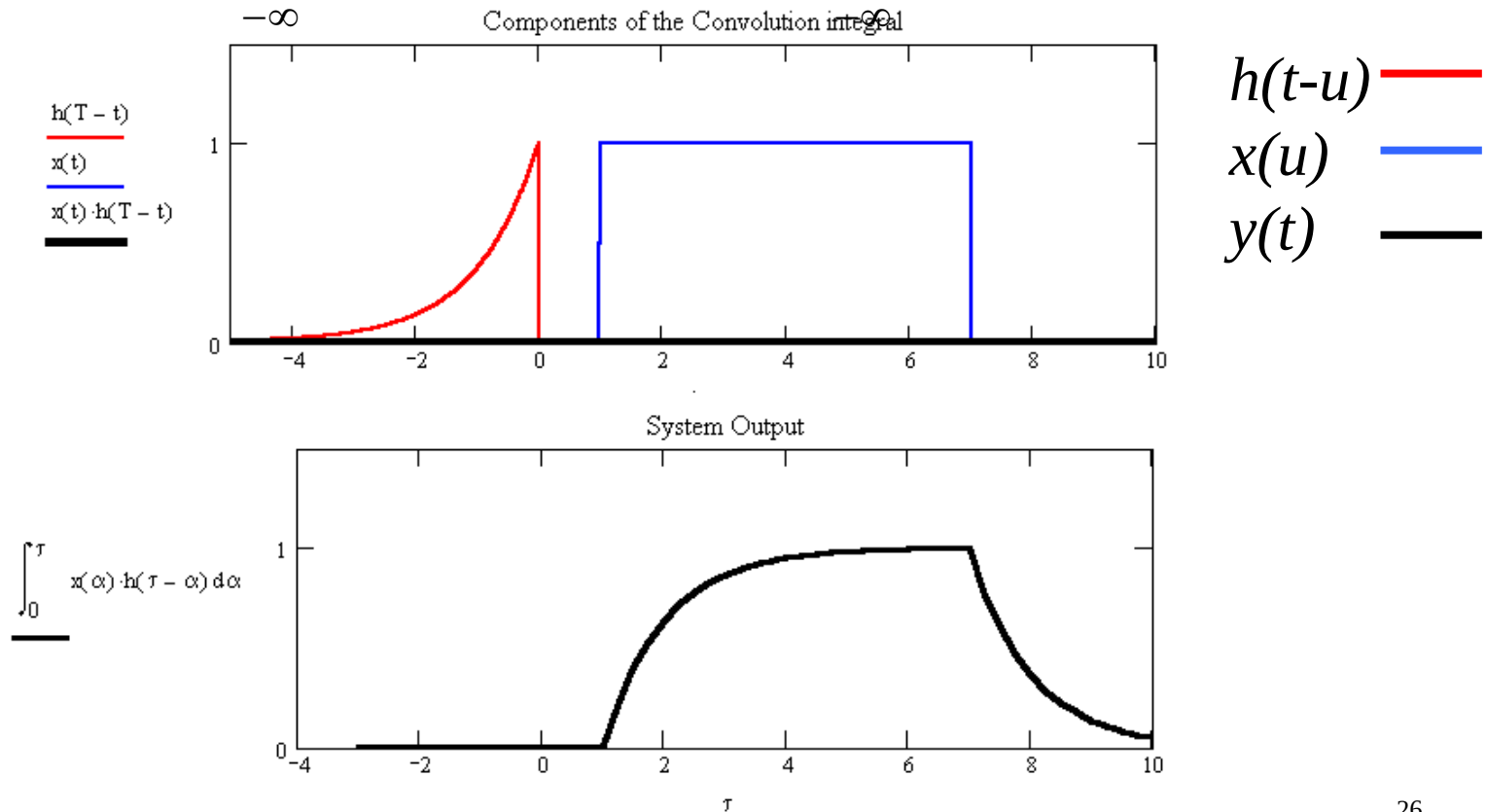


Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Produit de convolution

Illustration

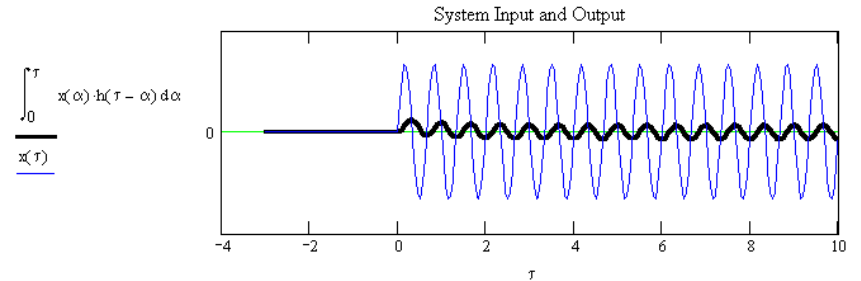
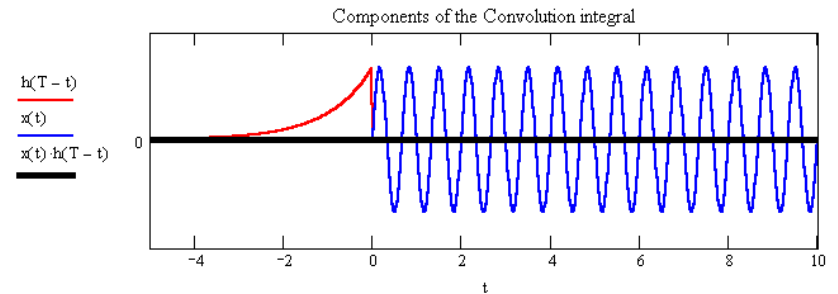
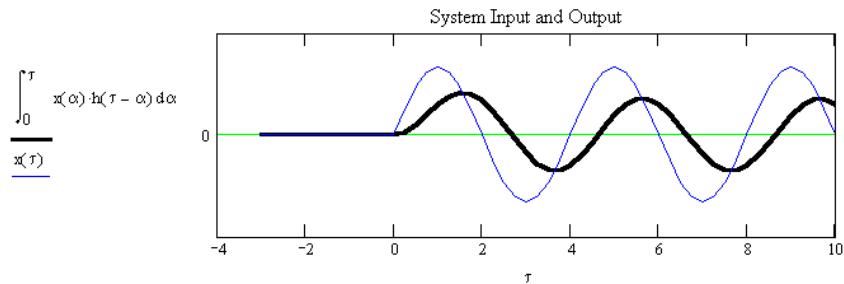
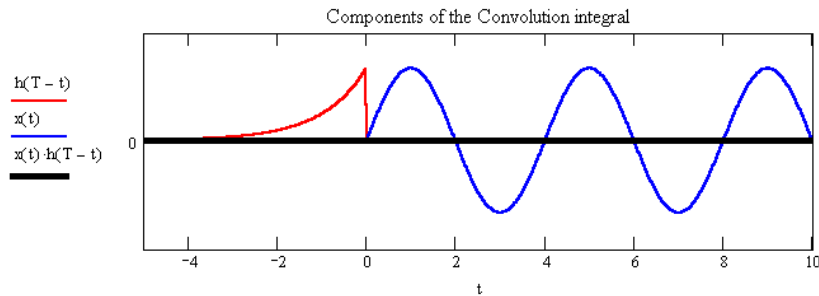
$$y(t) = S(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot h(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u) \cdot h(u) du$$



Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Produit de convolution

Illustration



$$y(t) = S(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot h(t-u) du$$

$h(t-u)$ — (Red line)
 $x(u)$ — (Blue line)
 $y(t)$ — (Black line)

Produit de convolution

Propriétés de l'opérateur de convolution

Propriétés	Domaine temporel
Commutativité	$x*y=y*x$
Distributivité	$x*(y_1+y_2)=x*y_1+x*y_2$
Linéarité	$x*(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x*y_1+\beta x*y_2$
Associativité	$x*(y*z)=(x*y)*z$
Élément neutre	$x*\delta=x$
Dérivation	$(x*y)'=x'*y=x*y'$
Translation	$[x*y](t-t_o)=[x(t-t_o)]*[y(t)]=[x(t)]*[y(t-t_o)]$

Propriété importante :

Les propriétés de l'élément neutre et de translation montrent que convoluer par l'impulsion de Dirac centrée en a , notée $\delta_a(t)=\delta(t-a)$, revient à traduire un signal de a .

$$\delta(t-a)*x(t) = \delta(t)*x(t-a) = x(t-a)$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Convolution

Intégrale du produit de convolution:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x * y) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$$

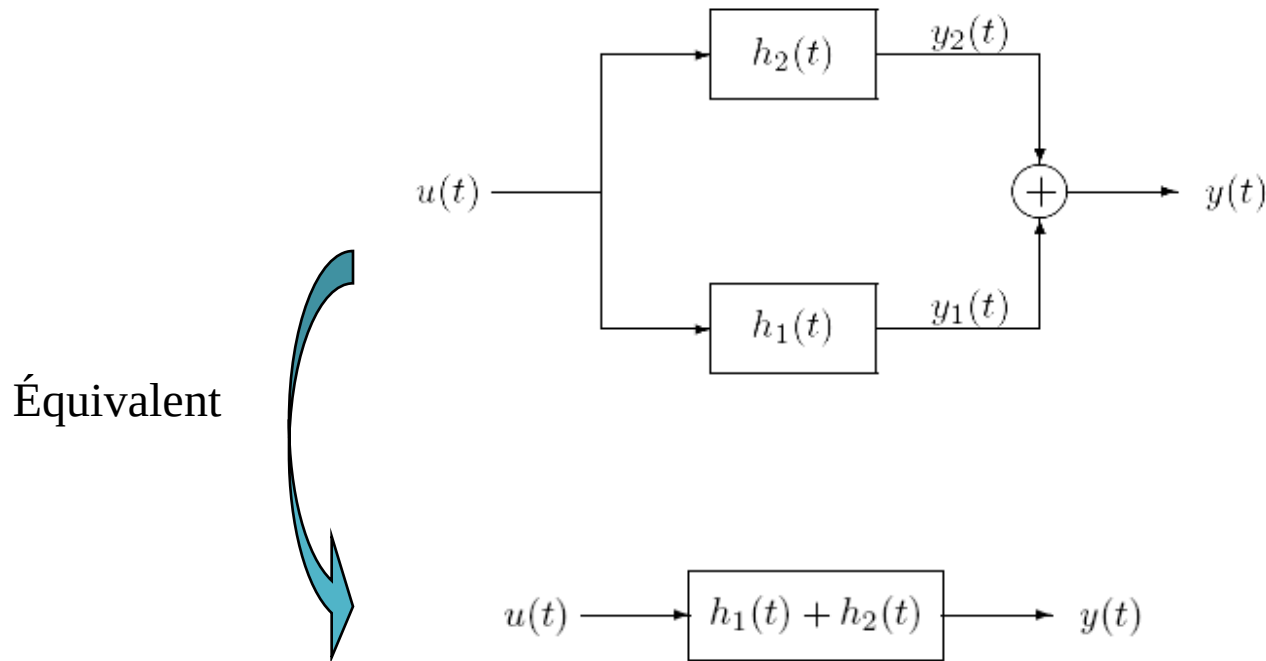
L'intégrale du produit de convolution de 2 fonctions sommables est le produit des intégrales des 2 fonctions

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Convolution

Distributivité: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

Soit H_1 et H_2 deux systèmes linéaires et invariants

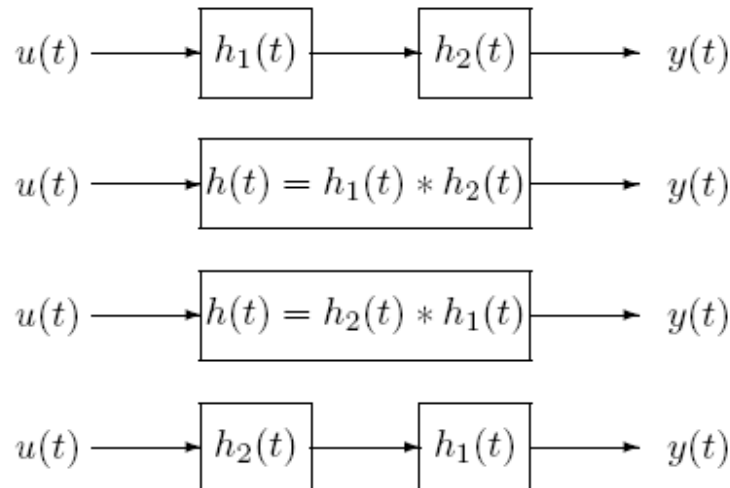


Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Convolution

Associativité: $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

Soit H_1 et H_2 deux systèmes linéaires et invariants

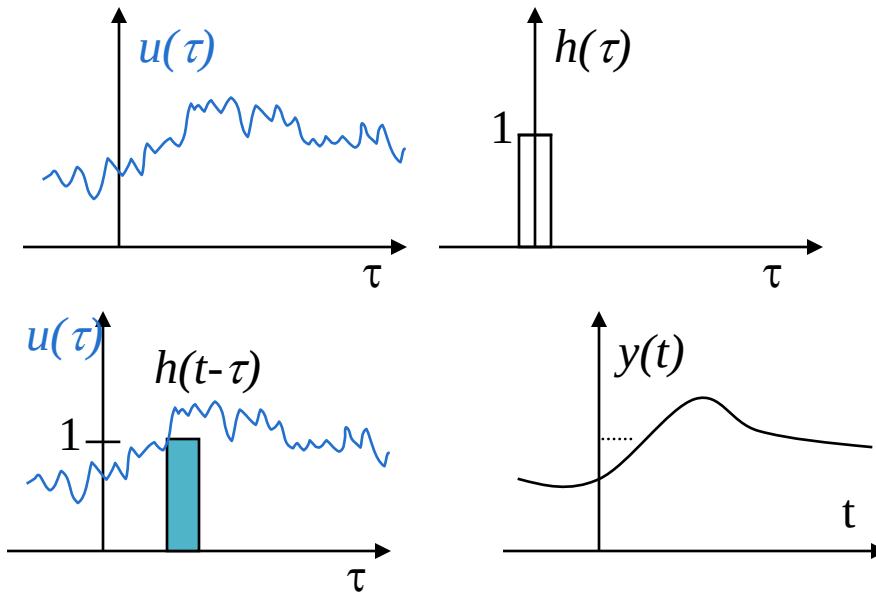
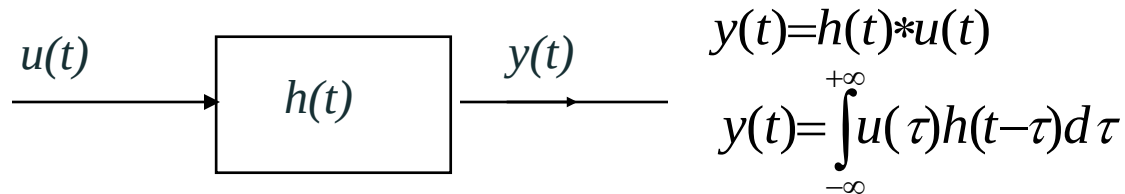


La réponse d'un système LIT en cascade ne dépend pas de l'ordre des sous systèmes LIT dans la cascade.

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Produit de convolution avec une fonction porte

Exemple : Effet régularisant de la convolution



- En général l'une des 2 fonctions ($h(t)$) est à support bornée et très rapidement décroissante
- $y(t)$ représente alors une moyenne de $u(t)$ pondérée au voisinage de chaque point t par $h(t-\tau)$
- Si $h(t)$ est suffisamment régulière alors $y(t)$ présente moins de fluctuations rapide que $u(t)$

Exemple de ce type d'application : la mesure physique
 $u(t)$ fonction réelle à mesurer
 $h(t)$ effet de l'instrument de mesure
 $y(t)$ résultat de la mesure

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Équation de convolution et stabilité des systèmes

Un système LIT est dit stable si sa réponse $y(t)$ a une excitation bornée quelconque $u(t)$ est bornée

ie $\exists U \quad \forall t \in \mathbb{R}, |u(t)| < U_{\max}$ est un signal borné ie $\exists U_y \quad \forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| < U_y$

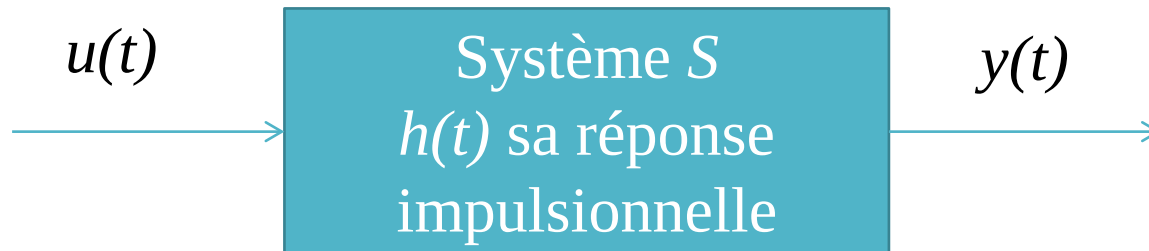
Dans le cas des SLIT on montre qu'un SLIT est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle est convergente:

$$y(t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau \right| < \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| d\tau$$
$$< U_{\max} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < Y_{\infty} < \infty$$

Les systèmes linéaires et invariants

Équation de convolution

Si un système est causal, linéaire et invariant par translation et que sa réponse $y(t)$ à une excitation bornée quelconque $u(t)$ est bornée. Connaissant sa réponse impulsionnelle, on peut calculer sa sortie quel que soit le signal d'entrée tel que



Avec

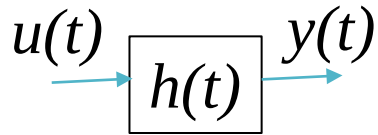
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

- En électronique, on étudie plus particulièrement les systèmes en régime sinusoïdal établi

Réponse des SLIT de réponse impulsionnelle $h(t)$ à une excitation sinusoïdale $u(t)$:



$$u_r(t) = U \cdot \cos \omega_0 t = U \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

si $u(t) = U \cdot e^{j\omega_0 t}$

alors

$$y(t) = S(u, t) = [h * u](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu) \cdot u(t - \nu) d\nu$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

Réponse des SLIT de réponse impulsionnelle $h(t)$ à une excitation sinusoïdale $u(t)$:

$$\text{si } u(t) = U.e^{j\omega_0 t} \text{ alors } y(t) = S(u, t) = [h * u](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).u(t - \nu)d\nu$$



$$y(t) = S(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).Ue^{j\omega_0(t-\nu)}(t - \nu).d\nu = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega_0\nu} d\nu \right]}_{\text{On retrouve } u(t)} \cdot U.e^{j\omega_0 t}$$

C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle pour $\omega = \omega_0$

Les fonctions exponentielles complexes sont les fonctions propres du produit de convolution

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

$$\text{si } u(t) = U.e^{j\omega_0 t} \quad y(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega_0 \nu} d\nu \right] U.e^{j\omega_0 t}$$

- La convolution est un opérateur linéaire,
- Les fonctions exponentielles sont les fonctions propres de l'opérateur de convolution avec la valeur propre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega_0 \nu} d\nu$$

C'est un scalaire ➔ C'est la valeur de la transformée de Fourier de $h(\nu)$ pour $\omega=\omega_0$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

Ces valeurs propres prennent une forme toute particulière pour un système dynamique linéaire et invariant .

Partons de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'entrée-sortie si $u(t) = U.e^{j\omega_0 t}$

$$a_0.y + a_1.\dot{y} + a_2.\ddot{y} + \dots + a_n.y^{(n)} = b_0.u + b_1.\dot{u} + b_2.\ddot{u} + \dots + b_q.u^{(q)}$$

Puisque ce système est linéaire et invariant dans le temps
une excitation harmonique $u(t)$

$$u(t) = U.e^{j\omega_0 t}$$

génère une réponse de même fréquence de la forme :

$$y(t) = Y.e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

$$a_0.y + a_1.\dot{y} + a_2.\ddot{y} + \dots + a_n.y^{(n)} = b_0.u + b_1.\dot{u} + b_2.\ddot{u} + \dots + b_q.u^{(q)}$$

$$\text{si } u(t) = U.e^{j\omega_0 t} \longrightarrow y(t) = Y.e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\dot{u}(t) = U.j\omega_0.e^{j\omega_0 t}, \ddot{u}(t) = U.(j\omega_0)^2.e^{j\omega_0 t} \dots$$

$$\dot{y}(t) = Y.j\omega_0.e^{j(\omega_0 t + \varphi)}, \ddot{y}(t) = Y.(j\omega_0)^2.e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + \dots$$

$$\sum_{j=0}^n a_j.(j\omega_0)^j Y e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi} = \sum_{i=0}^q b_i.(j\omega_0)^i U e^{j\omega_0 t}$$

Réponse Harmonique du système

$$\frac{y}{u} = \frac{Y e^{j\omega_0 t}}{U e^{j\omega_0 t}} e^{j\varphi} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i.(j\omega_0)^i}{\sum_{j=0}^n a_j.(j\omega_0)^j} = H(j\omega_0)$$

39

$H(j\omega)$ est la fonction de transfert ou réponse fréquentielle

$H(j\omega_0)$ est la fonction de transfert ou réponse fréquentielle pour $\omega = \omega_0$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

si $x(t) = X.e^{j\omega t}$ alors $Y e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega\nu} d\nu \right]}_{\text{}} . X.e^{j\omega t}$

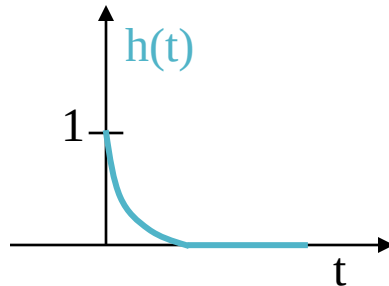
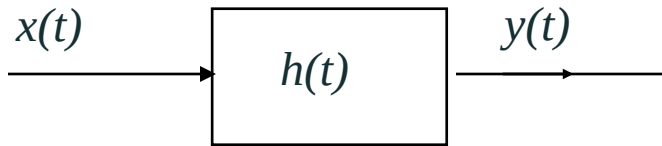
ou

$$\frac{Y_C}{X_C} = \frac{Y e^{j\omega t}}{X e^{j\omega t}} e^{j\varphi} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i . (j\omega)^i}{\sum_{j=0}^n a_j . (j\omega)^j} = H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega\nu} d\nu$$

La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un système LIT est égale à la fonction de transfert de ce système

Exemple d'application la mesure physique (optique)



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) . e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} . e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(j\omega + \alpha)t} dt$$

$$H(\omega) = \left[\frac{e^{-(j\omega + \alpha)t}}{-(j\omega + \alpha)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(j\omega + \alpha)}$$

Exemple de ce type d'application : la mesure physique
 $x(t)$ fonction réelle à mesurer
 $h(t)$ effet de l'instrument de mesure
 $y(t)$ résultat de la mesure

- Un système LIT mesure l'intensité optique d'une source
- La réponse impulsionnelle du système est telle que $h(t) = e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$
- Quelle est la fonction de transfert de ce système ?

$$H(f) = \frac{1}{(j2\pi f + \alpha)}$$

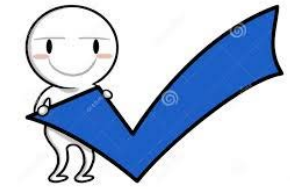
Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

Ceci permet de prévoir la réponse a une excitation sinusoïdale réelle :

$$\begin{aligned} \text{si } x(t) &= X \cdot \cos(2\pi f t) = \frac{X}{2} \cdot (e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}) \\ y(t) &= \text{IR}_e \{ H(f) \cdot X \cdot e^{j2\pi f t} \} = Y \cos(2\pi f t + \varphi) \\ &= \frac{Y}{2} e^{j\varphi} (e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Avec} \\ Y = |H(f)| \cdot X \text{ et } \varphi = \arg(H(f)) \end{array} \right\}$$

Par extension, cette fonction de transfert peut permettre de prévoir simplement la réponse à une excitation si elle peut se mettre sous la forme d'une somme discrète et dénombrable de sinusoides.



A retenir

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Convolution

Caractérisation d'un système

1. La convolution est l'équation qui relie l'entrée et la réponse impulsionnelle des systèmes linéaires et invariants par translation à leur sortie
- 2 En pratique, il est difficile de générer une réponse impulsionnelle
3. L'équation différentielle des systèmes permet d'accéder à la fonction de transfert
4. La fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle
5. Les fonctions exponentielles complexes sont les fonctions propres des SLIT