

Transformée de Fourier des signaux

Transformation de Fourier

Définition de la transformation de Fourier

Toute fonction $x(t)$ sommable (au sens de Lebesgues) à énergie finie (fonction de L^2 Espace des fonctions de carré intégrable) possède une transformée de Fourier $X(f)$. On montre qu'elle est continue, bornée, tendant vers 0 lorsque $|f|$ tend vers l'infini

Transformée de Fourier

$$X(f) = \left\langle x(t), e^{-j2\pi ft} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformée de Fourier inverse

$$x(t) = \left\langle X(f), e^{j2\pi ft} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Transformation de Fourier

Propriétés de la transformation de Fourier

En physique: la formule d'inversion s'interprète comme une décomposition de $x(t)$ en une somme d'oscillations harmoniques .

Exemple de TF :

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{\sin \pi f}{\pi f} \qquad \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-\pi f^2}$$

Propriétés de symétrie de la transformée de Fourier

$$\begin{array}{l}
 f(t) = \text{partie réelle paire} + \text{imag. Paire} + \text{réelle imp.} + \text{imag. Imp.} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \quad \searrow \\
 F(v) = \text{partie réelle paire} + \text{imag. Paire} + \text{réelle imp.} + \text{imag. Imp.}
 \end{array}$$

Propriétés de la transformation de Fourier

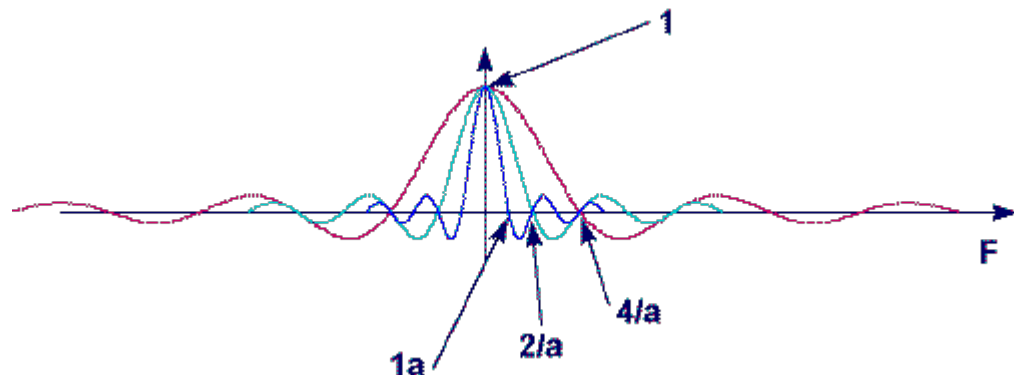
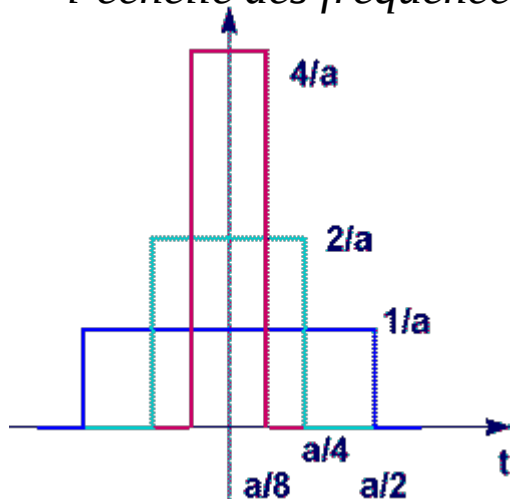
-Linéarité $[\lambda g_1(t) + \mu g_2(t)]_{\text{Fourier}} \rightarrow \lambda G_1(f) + \mu G_2(f)$

La combinaison de 2 signaux en temporelle devient la même combinaison de leur transformée de Fourier

- Transposition $[g(-t)]_{\text{Fourier}} \rightarrow G(-f)$

- Changement d'échelle $[g(at)]_{\text{Fourier}} \rightarrow \frac{1}{a} G(\frac{f}{a})$

Une compression de l'échelle des temps entraîne une dilatation de l'échelle des fréquences et une dilatation de l'échelle des temps entraîne une compression de l'échelle des fréquences



Propriétés de la Transformation de Fourier

- **Translation** $[g(t-a)] \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-j2\pi fa} G(f)$

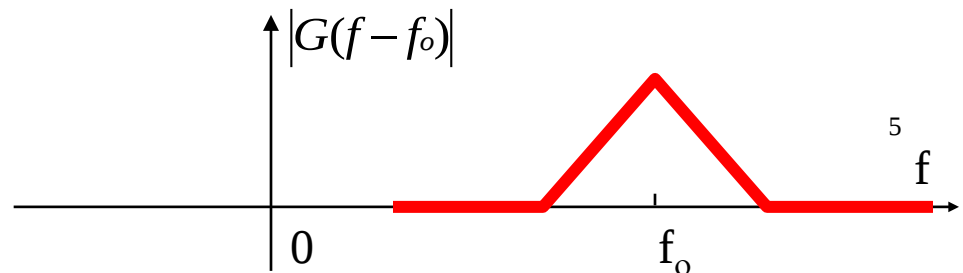
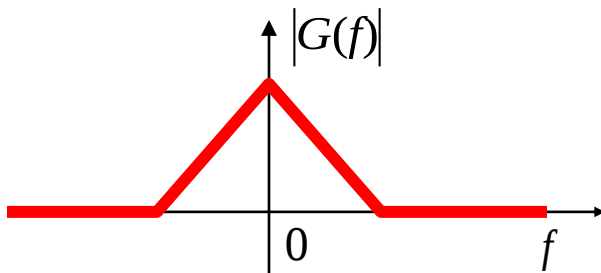
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-a) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j2\pi f(\tau+a)} d\tau = e^{-j2\pi fa} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = e^{-j2\pi fa} \cdot G(f)$$

Une translation de $g(t)$ correspond à un déphasage dans l'espace des fréquences de Fourier

- **Modulation** $[e^{j2\pi f_0 t} g(t)] \xrightarrow{\text{Fourier}} G(f - f_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt = G(f - f_0)$$

*Moduler une fonction $g(t)$ par une exponentielle imaginaire revient à traduire sa TF
→ c'est une relation importante pour la communication hertzienne*



Propriétés de la transformation de Fourier

• **Dérivation par rapport à la variable t :** $\mathcal{F} [f^{(m)}(t)] = (j2\pi f)^m F(f)$

$$\mathcal{F} [f^{(m)}(t)] = (j2\pi f)^m F(f) = \int f^{(m)}(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \Rightarrow \quad |2\pi f|^m |F(f)| \leq \int |f^{(m)}(t)| dt$$

Plus f est dérivable à dérivées sommables, plus $F(f)$ décroît rapidement à l'infini

Exemple : $\Pi(t) \xrightarrow{TF} \frac{\sin \pi f}{\pi f}$ décroît en $1/f$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{TF} \frac{\sin^2 \pi f}{\pi^2 f^2} \text{ décroît en } 1/f^2$$

• **Dérivation par rapport à la fréquence f :** $\mathcal{F} [(j2\pi f)^m f(t)] = F^{(m)}(f)$

$$|F^{(m)}(f)| \leq \int |f(t)| |2\pi f|^m dt$$

Plus $f(t)$ décroît à l'infini, plus $F(f)$ est dérivable (avec des dérivées bornées)

Propriétés de la transformation de Fourier

-Convolution

$$\left[g_1(x) * g_2(x) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow G_1(f) \cdot G_2(f)$$

$$\left[g_1 * g_2 \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \int e^{-j2\pi f t} \int g_1(\tau) \cdot g_2(t - \tau) d\tau dt$$

$$\left[g_1 * g_2 \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \int g_1(\tau) \cdot \left(\int g_2(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right) d\tau$$

En posant $\alpha = t - \tau$:

$$\left[g_1 * g_2 \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \int g_1(t) e^{-j2\pi f t} dt \cdot \left(\int g_2(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha \right)$$

$$\left[g_1(x) * g_2(x) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow G_1(f) \cdot G_2(f)$$

Propriétés de la transformation de Fourier

$$\begin{aligned}x(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) \\h(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} H(f) \\y(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} Y(f)\end{aligned}$$

Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * x(t) \implies Y(f) = H(f) \cdot X(f) \\y(t) &= h(t) \cdot x(t) \implies Y(f) = H(f) * X(f)\end{aligned}$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est égale au produit des transformées de Fourier des deux fonctions.

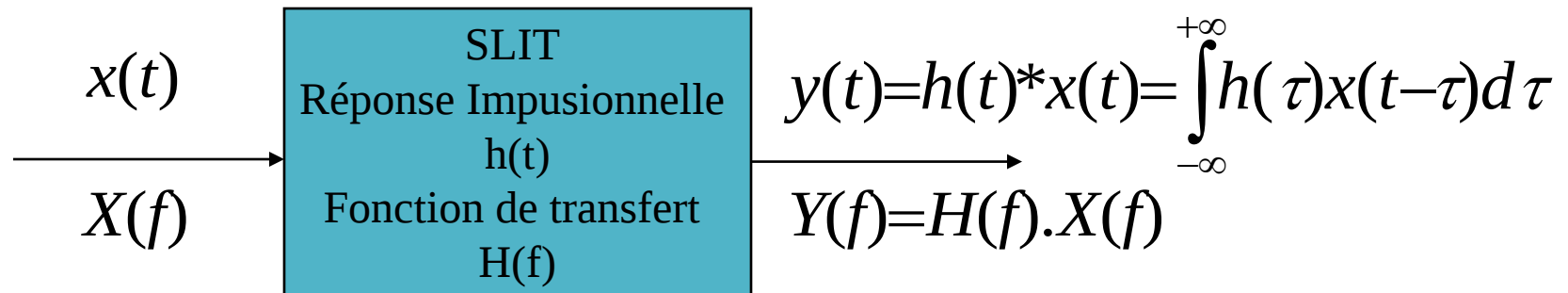
La transformée de Fourier du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier des deux fonctions.

Propriétés de la transformation de Fourier

Théorème de Plancherel et Système linéaire et invariant

Théorème de Plancherel

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ y(t) &= h(t) \cdot x(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} Y(f) &= H(f) \cdot X(f) \\ Y(f) &= H(f) * X(f) \end{aligned} \right\}$$



Propriétés de la transformation de Fourier

Formule de Parseval-Plancherel

$X(f)$ et $Y(f)$ les Transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$

$$\begin{array}{l|c|l} X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt & \xrightarrow{\text{Transformée de Fourier}} & x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \\ Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt & \text{Fourier inverse} & y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \end{array}$$

Le produit scalaire des 2 fonctions

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \right] dt$$

t et f étant 2 variables indépendantes :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot dt \right] \cdot df$$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-f) \cdot Y(f) \cdot df$$

Le théorème de Parseval – Plancherel traduit la conservation du produit scalaire suite à la transformée de Fourier

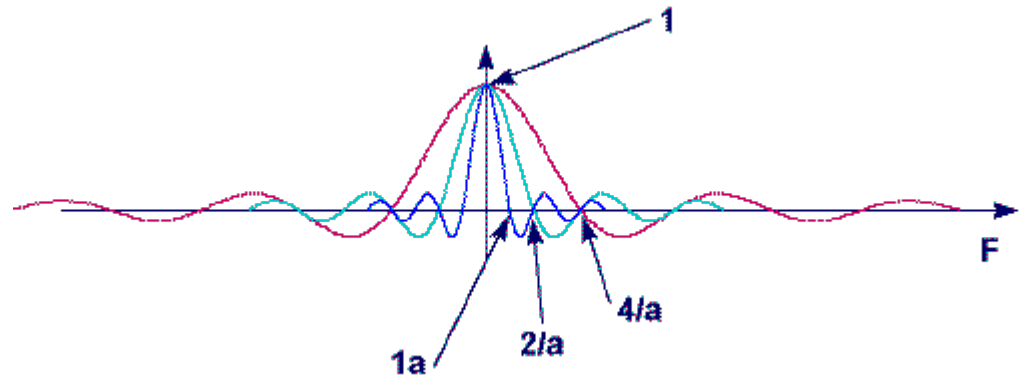
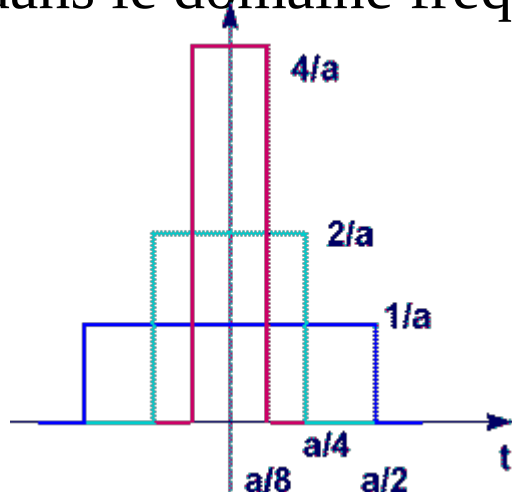
Propriétés de la transformation de Fourier

Formule de Parseval-Plancherel

Un cas particulier important $x = y$, et x réelle soit : $X(f) = X^*(-f)$

$$E = \langle x, x^* \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

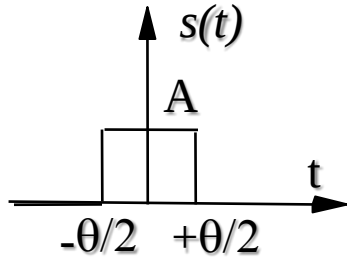
Par conséquent, l'énergie d'un signal peut être aussi bien mesurée dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel.



Propriétés de la transformation de Fourier

Formule de Parseval

Exemple



Quelle bande passante est nécessaire pour que 95% de l'énergie de ce signal soit transmise ?

L'énergie E est :

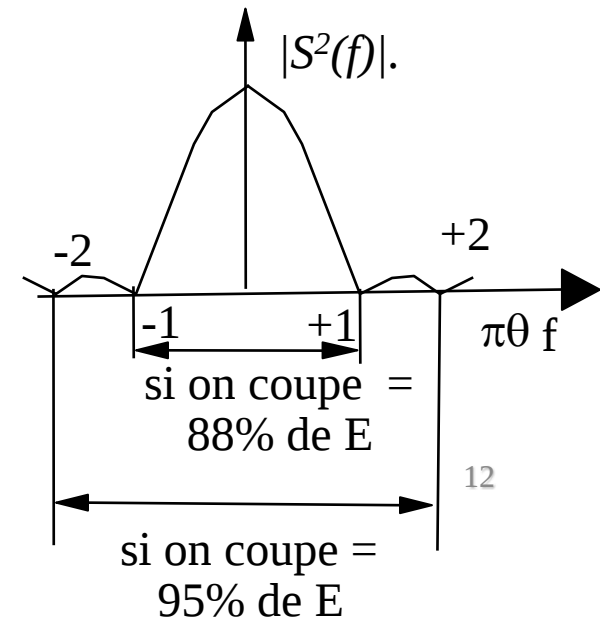
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot \Pi\left(\frac{-\theta}{2}, \frac{+\theta}{2}\right) \cdot dt = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} A^2 dt = A^2 \cdot \theta$$

Transformée de Fourier du signal

$$TF(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot \Pi\left(\frac{-\theta}{2}, \frac{+\theta}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = S(f) = A \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = A\theta \frac{\sin \cdot \pi f \theta}{\theta \pi f}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot S^*(f) df$$

95% $A^2\theta$ pour $f = 2/\pi\theta$



Signaux périodiques

Les signaux périodiques sont des signaux à énergie infinie et à puissance finie ils ne sont donc pas de carré intégrable Ils n'appartiennent donc pas à l'Espace L^2

→ on ne peut donc pas calculer directement leur transformée de Fourier



Il faut calculer le développement en série de Fourier

→ c'est une décomposition temporelle