

Série de Fourier

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

Toutes fonction périodique $x(t)$ sommable sur une période T_0 ($T_0 = 1/F_0$) possède un développement en série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n F_0 t}$$

Avec

$$c_n(F_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt \quad \text{avec } F_0 = 1/T_0$$

Les coefficients de la série de Fourier c_n peuvent être complexes²

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) e^{-j2\pi n F_o t} dt$$

$$F_o = \frac{1}{T_o}$$

➔ En regroupant 2 à 2 les termes correspondant à des valeurs opposées de n , $x(t)$ peut également s'écrire:

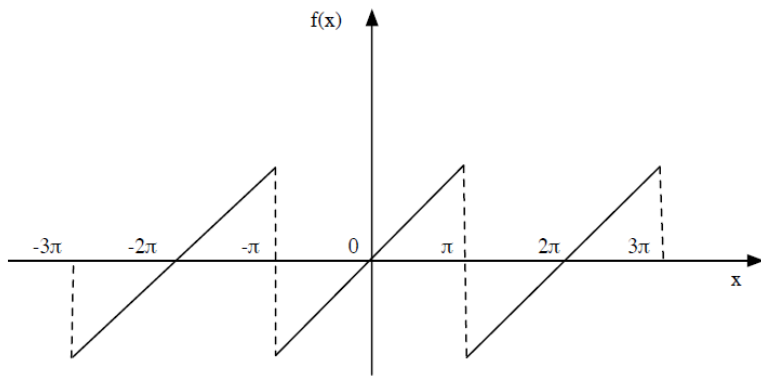
$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi F_o n.t + b_n \sin 2\pi F_o n.t \right)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} a_o = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) dt \\ a_n(F_o) = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \cos(2\pi F_o n.t) dt \\ b_n(F_o) = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \sin(2\pi F_o n.t) dt \end{array} \right.$$

Remarque: a_o représente la valeur moyenne de $x(t)$

Exemple 1

$$f(x) = x \quad -\pi < x < \pi$$



Cette fonction est monotone par morceaux et bornée

Elle admet donc un développement en série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \, dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \cos kx \, dx = 0 \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \sin kx \, dx = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$$

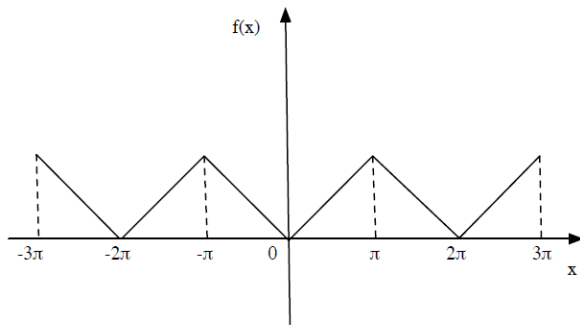
On obtient ainsi le développement de $f(x)$ en série de Fourier

$$f(x) = 2 \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} \right]$$

Exemple 2

$$f(x) = -x \quad -\pi < x \leq 0$$

$$f(x) = +x \quad 0 < x \leq \pi$$



Cette fonction est monotone par morceaux et bornée

Elle admet donc un développement en série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{+0} (-x) dx + \int_0^{+\pi} x dx \right] = \frac{\pi}{2}$$

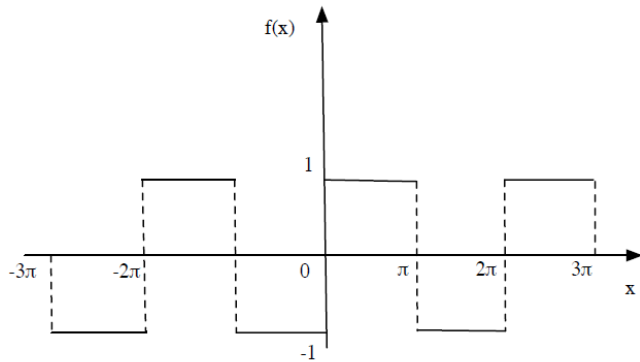
$$a_k = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) \quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -4/\pi k^2 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad b_k = 0$$

On obtient ainsi le développement de $f(x)$ en série de Fourier

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots \right]$$

Exemple 3

$$f(x) = -1 \quad -\pi < x \leq 0$$
$$f(x) = +1 \quad 0 < x \leq \pi$$



$$a_k = 0$$

Cette fonction est monotone par morceaux et bornée

Elle admet donc un développement en série de Fourier

$$a_0 = 0$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 4/\pi k & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

On obtient ainsi le développement de $f(x)$ en série de Fourier

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)} + \dots \right]$$

Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

$$F_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi F_0 n.t + b_n \sin 2\pi F_0 n.t \right)$$

➔ Quelle est la représentation spectrale d'un tel signal ?

Représentation spectrale des séries de Fourier des signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) e^{-j2\pi n F_o t} dt$$

$$F_o = \frac{1}{T_o}$$

→ Quelle est la représentation spectrale d'un tel signal ?

Rappel : Résultats fondamentaux dans le cadre de la théorie des distributions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} df = \delta(t)$$

TF de $x(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_o t} \right] \cdot e^{-2j\pi f t} dt$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2j\pi n F_o t} \cdot e^{-2j\pi f t} dt$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi (f - n F_o) t} dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot \delta(f - n F_o)$$

Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) e^{-j2\pi n F_o t} dt$$

$$F_o = \frac{1}{T_o}$$

➔ Quelle est la représentation spectrale d'un tel signal qui n'est pas à énergie finie ?

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot \delta(f - nF_o)$$

C'est un spectre discontinu ➔ Spectre de raies

$|c_n|$ ➔ Représente l'amplitude de la raie

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n})$$

$\delta(f - nF_o)$ ➔ Représente la localisation fréquentielle de la raie spectrale en
 $f = nF_o$

Représentation spectrale des séries de Fourier des signaux périodiques

Exemple

$$x(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$$

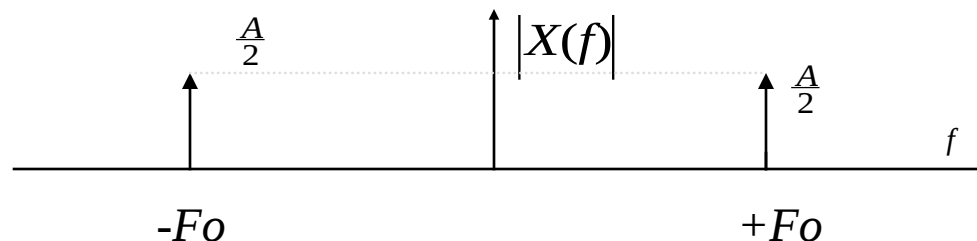
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_0 t}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi F_0 t) = A \frac{e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t}}{2}$$

$$c_{-1} = c_{+1} = \frac{A}{2} \text{ et } (c_n)_{n \neq \pm 1} = 0$$

Au sens de la théorie des distributions

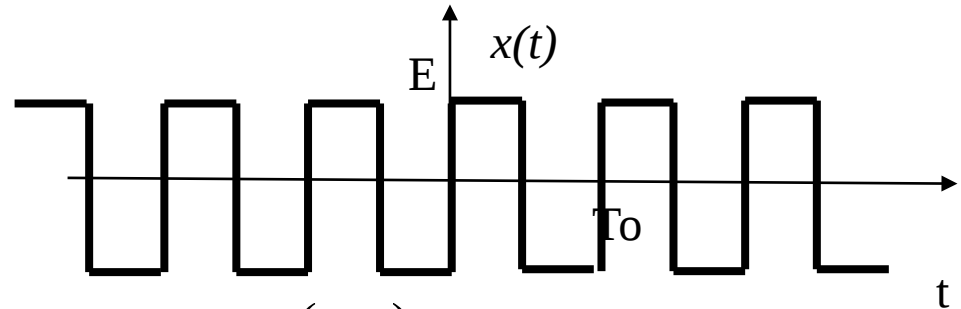
$$X(f) = \frac{A}{2} \delta(f + F_0) + \frac{A}{2} \delta(f - F_0)$$



Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques Exemple

$x(t) \Rightarrow$ Signal carré de période T_0 de fréquence F_0 d'amplitude E de moyenne nulle

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \cdot e^{2j\pi n F_0 t}$$

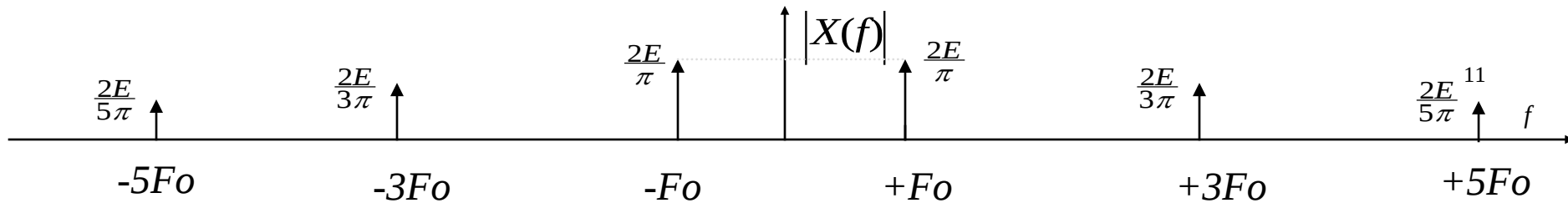


$$C_n = \frac{2E}{\pi(2n+1)} e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2E(-j)}{\pi(2n+1)} \cdot e^{2j\pi(2n+1)F_0 t}$$

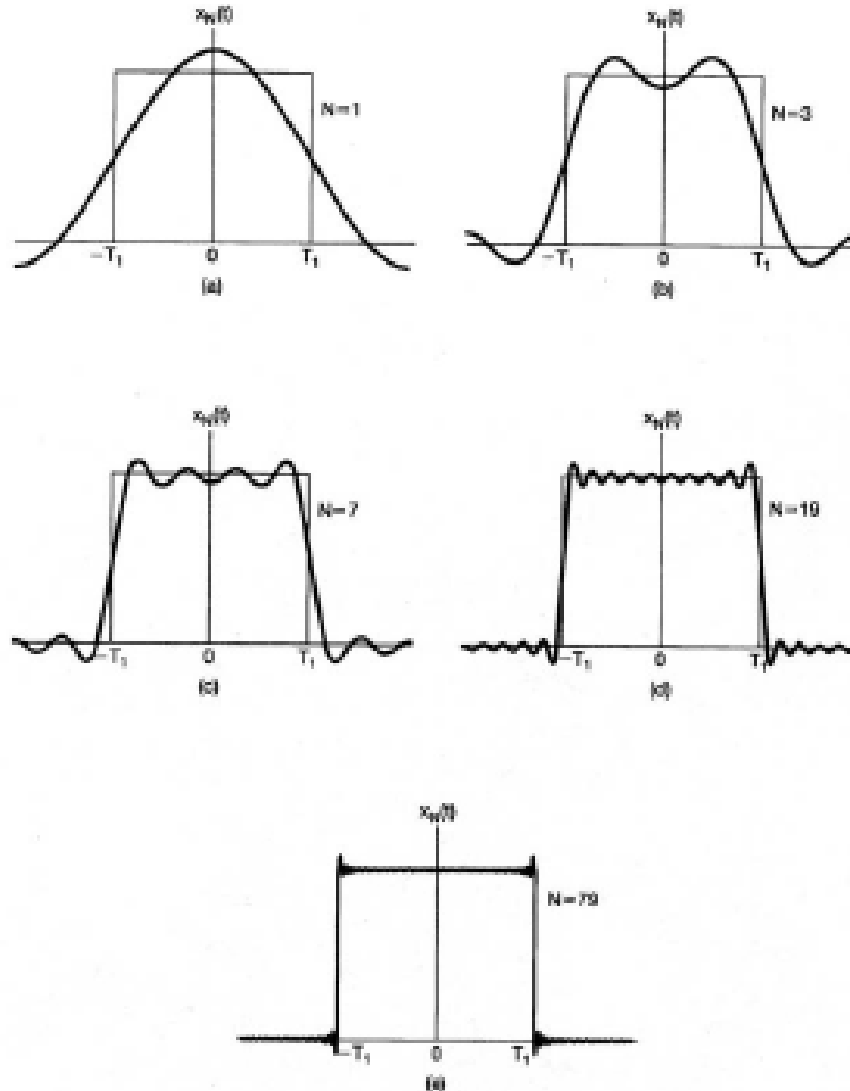
Au sens de la théorie des distributions

$$X(f) = (-j) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2E}{\pi(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$



Représentation temporelle des série de Fourier des signaux périodiques pour n borné

Exemple

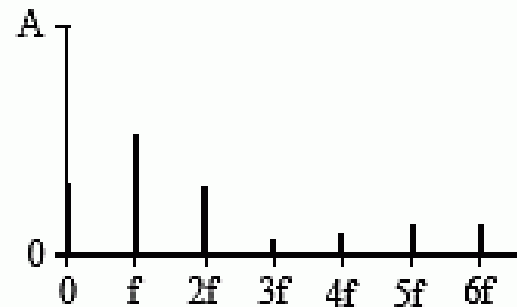
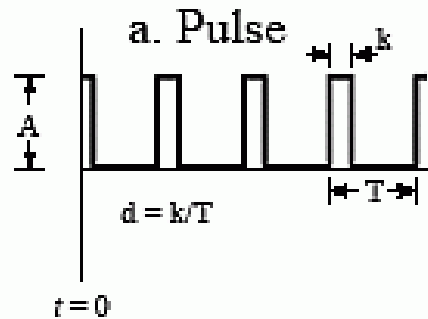


Représentation temporelle des série de Fourier

des signaux périodiques pour n borné



Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques : Exemple

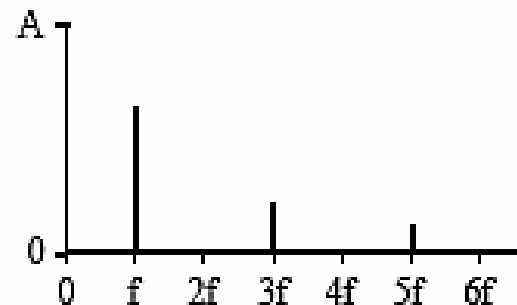
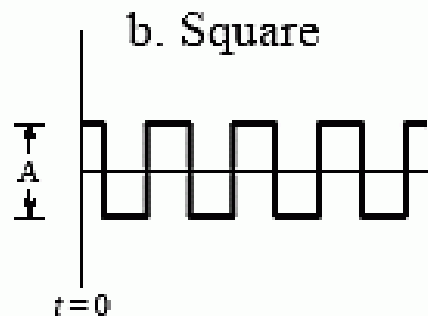


$$a_0 = A d$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi d)$$

$$b_n = 0$$

($d = 0.27$ in this example)

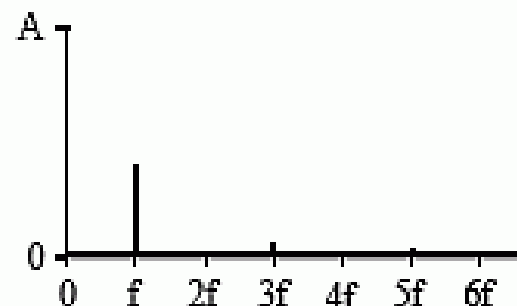
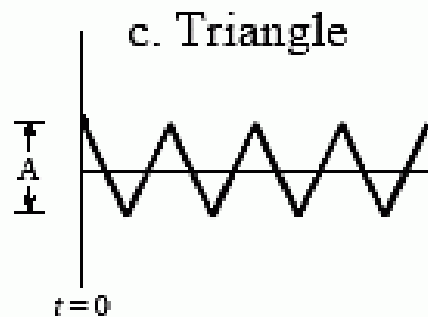


$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = 0$$

(all even harmonics are zero)



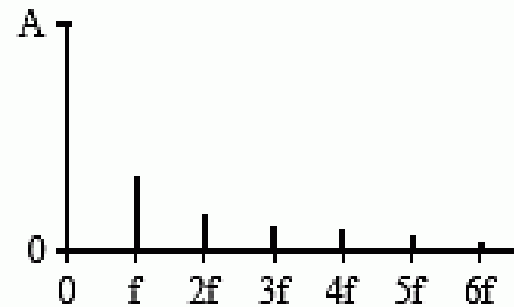
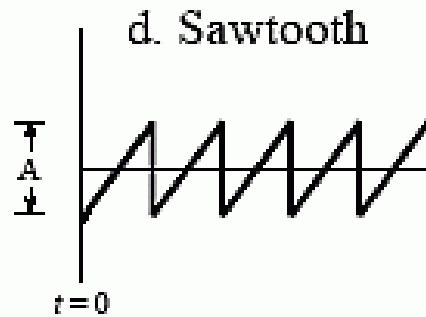
$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{4A}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = 0$$

(all even harmonics are zero)

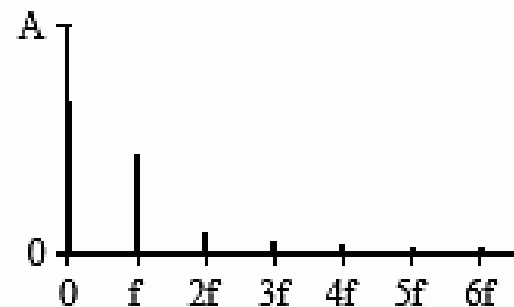
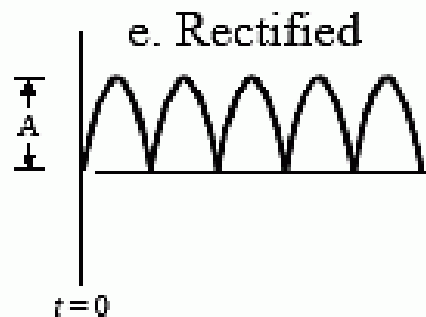
Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques : Exemple



$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

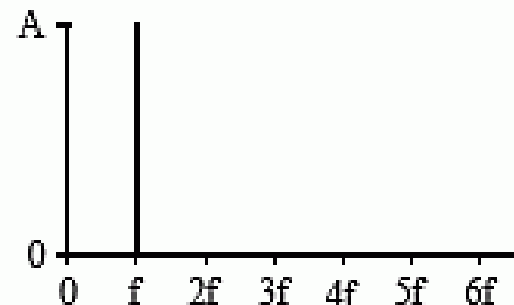
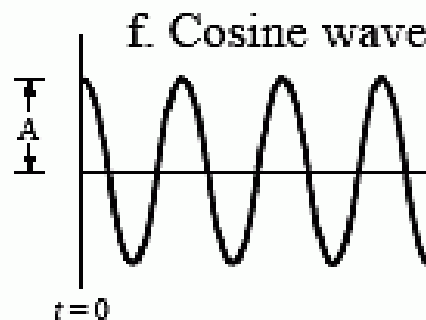
$$b_n = \frac{A}{n\pi}$$



$$a_0 = 2A/\pi$$

$$a_n = \frac{-4A}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$b_n = 0$$

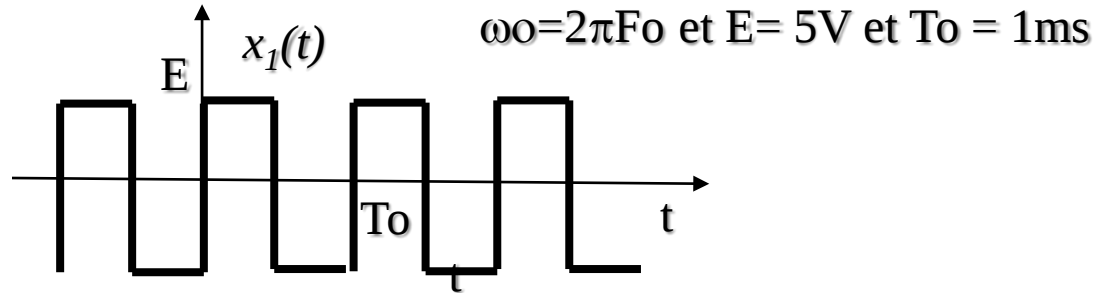
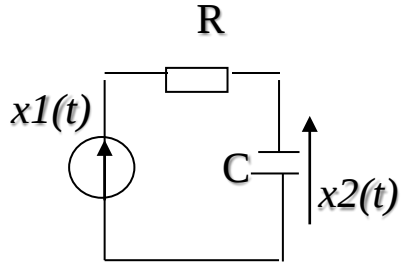


$$a_1 = A$$

(all other coefficients are zero)

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps et décomposition en série

Exercice



- 1) Calculer la fonction de transfert $H(j\omega) = X_2 / X_1$ $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$
- 2) Comment exprimer $x_2(t)$ en fonction de R , C , ω et de $x_1(t)$

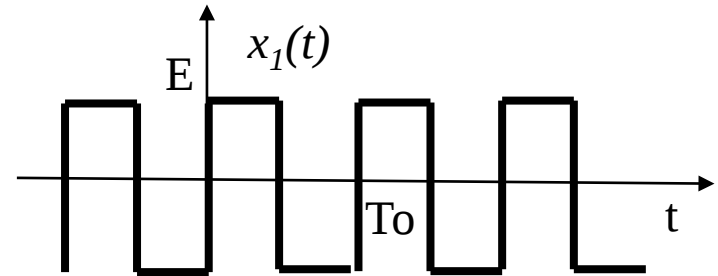
Avec cette réponse fréquentielle (SLI), on ne peut qu'introduire en entrée que des fonctions propres, donc il est nécessaire de décomposer l'entrée en une somme d'exponentielles.

Comment ? $\rightarrow$ Décomposition en série de Fourier

Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques Exemple

$x_1(t) \Rightarrow$ Signal carré de période T_0 de fréquence F_0 d'amplitude E de moyenne nulle

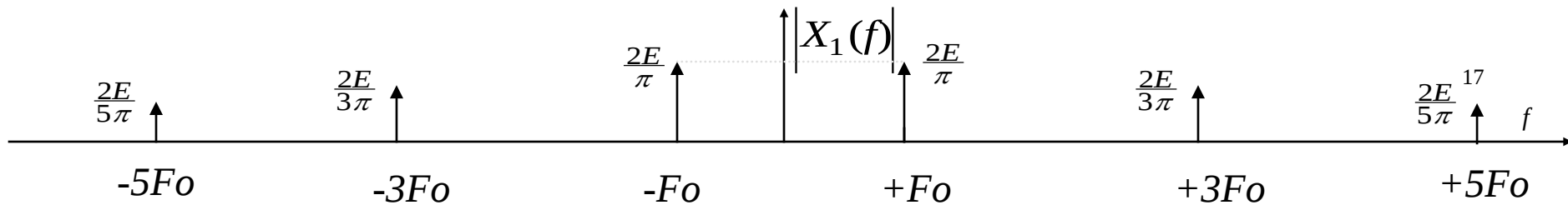
$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_0 t}$$



$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2E(-j)}{\pi(2n+1)} \cdot e^{2j\pi(2n+1)F_0 t}$$

Au sens de la théorie des distributions

$$X_1(f) = (-j) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2E}{\pi(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$



Les systèmes linéaires et invariants dans le temps et décomposition en série : Exemple

Le système :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad H(jF_0(2n+1)) = \frac{1}{1 + j(2\pi(2n+1)F_0)RC}$$

Module et phase de $H(j2\pi F_0(2n+1)) = H_n(F_0(2n+1)) \cdot e^{j\varphi_n(F_0(2n+1))}$

$$\begin{cases} H_n((2n+1)F_0) = |H(j2\pi F_0(2n+1))| = \frac{1}{\sqrt{1 + [(2\pi(2n+1)F_0)RC]^2}} \\ \varphi_n((2n+1)F_0) = -\arctan[(2n+1)2\pi F_0 RC] \end{cases}$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps et décomposition en série : Exemple

Entrée $\rightarrow x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2E(-j)}{\pi(2n+1)} \cdot e^{2j\pi(2n+1)F_0 t}$

Système $\rightarrow \begin{cases} H_n(F_0) = |H(j2\pi F_0(2n+1))| = \frac{1}{\sqrt{1 + [(2\pi(2n+1)F_0)RC]^2}} \\ \varphi_n(F_0) = -\arctan[(2n+1)2\pi F_0 RC] \end{cases}$

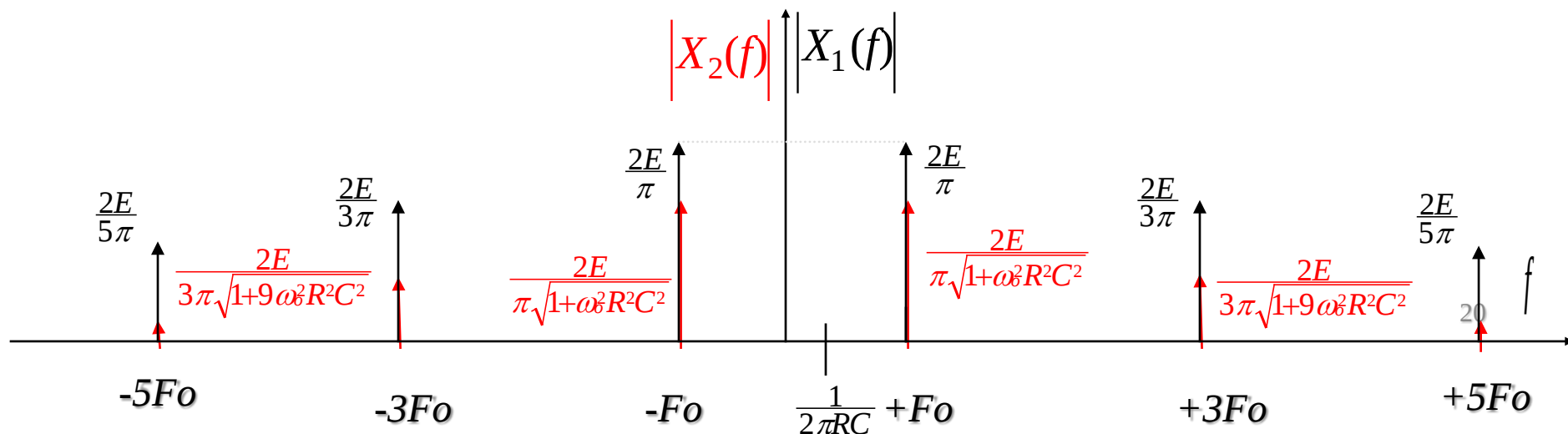
Sortie $\rightarrow \begin{cases} x_2(t) = (-j) \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{e^{j\varphi_n}}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 (2\pi F_0)^2 R^2 C^2}} \cdot e^{2j\pi(2n+1)F_0 t} \\ \varphi_n = -\arctan[(2n+1)\omega RC] \end{cases}$

$$X_2(f) = (-j) \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{e^{j\varphi_n}}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 (2\pi F_0)^2 R^2 C^2}} \delta(f - (2n+1)F_0)$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps et décomposition en série : Exemple

Entrée →
$$X_1(f) = (-j) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2E}{\pi(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$

Sortie →
$$X_2(f) = (-j) \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{e^{j\varphi_n}}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 \omega_0^2 R^2 C^2}} \delta(f - (2n+1)F_0)$$



L'égalité de Parseval

- On montre que la puissance moyenne du signal (de période T) qui est définie telle que

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

- et également exprimée à partir de la décomposition en série telle que : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \forall t \in \mathbb{R}$

$$P_{moyen} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Ou bien

$$P_{moyen} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

L'égalité de Parseval en physique

Par exemple:

L'intensité du son est proportionnelle à la moyenne du carré de la pression différentielle. $I_{sonore} = p^2 / \rho_0 C$

Lorsque la pression a une variation purement sinusoïdale $A \cos \omega t$, l'intensité est proportionnelle à A^2 . Dans la série de Fourier de $p(t)$, les intensités des différents harmoniques sont proportionnelles aux carrés des coefficients de Fourier correspondants.

L'égalité de Parseval correspond donc dans cet exemple au fait que la puissance sonore totale est égale à la somme des puissances associées aux différents harmoniques.



$$P_{moyen} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Propriété des coefficients de Fourier

Théorème : Si la fonction $f(x)$ est continue par morceaux sur le segment $(-\pi, +\pi)$, ses coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

En effet, si la fonction $f(x)$ est continue par morceaux sur le segment $(-\pi, +\pi)$, il en est de même de $f^2(x)$.

Donc l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ existe et est un nombre fini et donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$

Résumé

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps et signaux sinusoïdaux

Fonctions de Transfert:

$$e^{pt} \rightarrow H(p) e^{pt}$$

avec p complexe $p = \alpha + j\beta$

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-pt} dt$$

Avec $h(t)$ réponses
impulsionnelles
des SLTI

Réponses fréquentielles $e^{pt} \rightarrow e^{j\omega t}$

$$e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

avec $\omega = 2\pi f$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Réponse d'un SLTI à une
exponentielle complexe

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

Réponse d'un SLTI
à un signal sinusoïdal

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &\rightarrow \operatorname{Re}\{H(j\omega) e^{j\omega t}\} \\ \cos(\omega t) &\rightarrow |H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi(H(j\omega))) \end{aligned}$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps et signaux périodiques

Principe de superposition

La réponse d'un SLTI à une combinaison de plusieurs signaux d'entrée peut se déterminer en faisant la somme des réponses individuelles de chacun de ces signaux

	Temps Continu
Signal d'entrée périodique	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j k \omega_0 t}$
Réponse fréquentielle du SLTI	$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$
Réponse du SLTI au signal périodique	$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k H(j k \omega_0) e^{j k \omega_0 t}$
Coefficient de Fourier de la sortie périodique d'ordre k	$Y_k = X_k H(j k \omega_0)$