

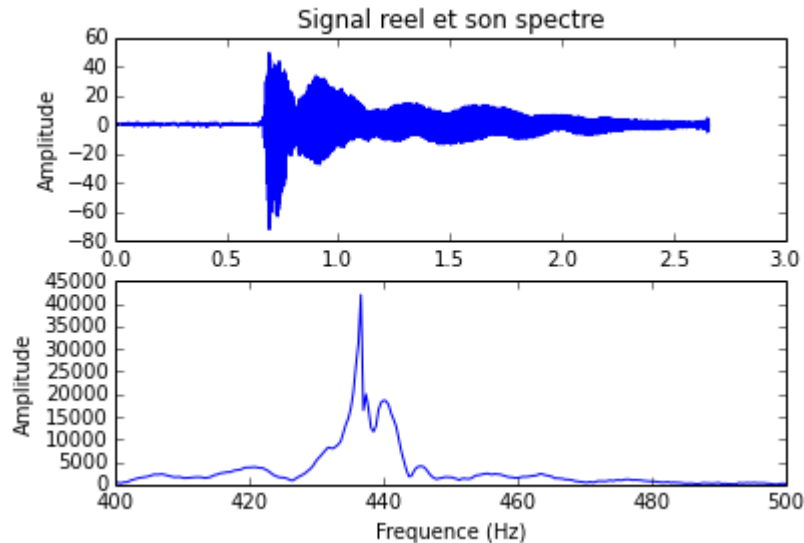
# Densité Spectrale de Puissance

Gestion des variables aléatoires

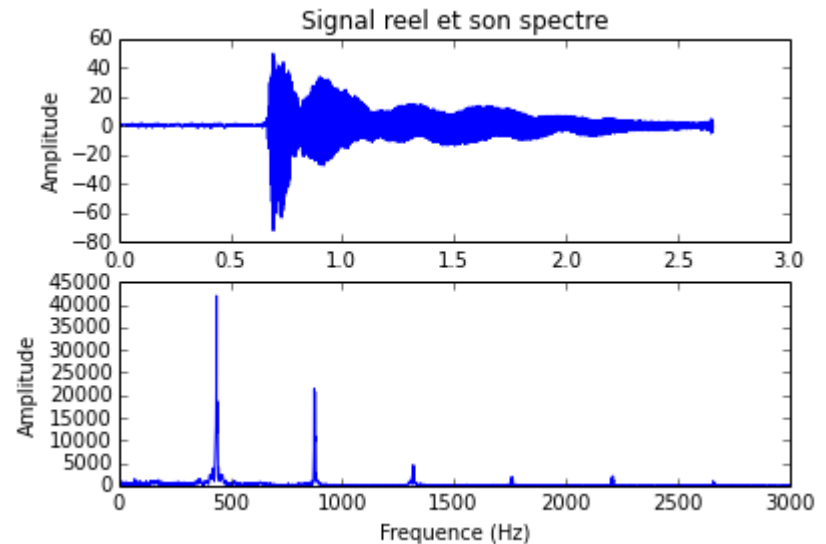
# Densité spectrale de puissance

## Signaux aléatoires

### Spectre des Signaux aléatoires ???



La3 d'un piano droit



# Densité spectrale de puissance

## Signaux aléatoires

### Spectre des Signaux aléatoires ???

Les bruits sont des signaux à variables aléatoires souvent à énergie infinie et à puissance moyenne finie

On accède à la répartition énergétique spectrale de ces signaux via la **densité spectrale de puissance** par le passage à la limite de l'observation et par l'intermédiaire de leur **fonction d'autocorrélation**

La densité spectrale de puissance  $G(f)$  est définie :

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(f) X_T^*(f)}{2T}$$

Avec

$$X_T(f) = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

# Densité spectrale de puissance

## Signaux aléatoires

On définit la Densité Spectrale de Puissance (DSP)  $G(f)$  telle que :

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(f) X_T^*(f)}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T}$$

On rappelle la définition de la puissance :  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x^*(t) dt$

D'après l'égalité de PARSEVAL :

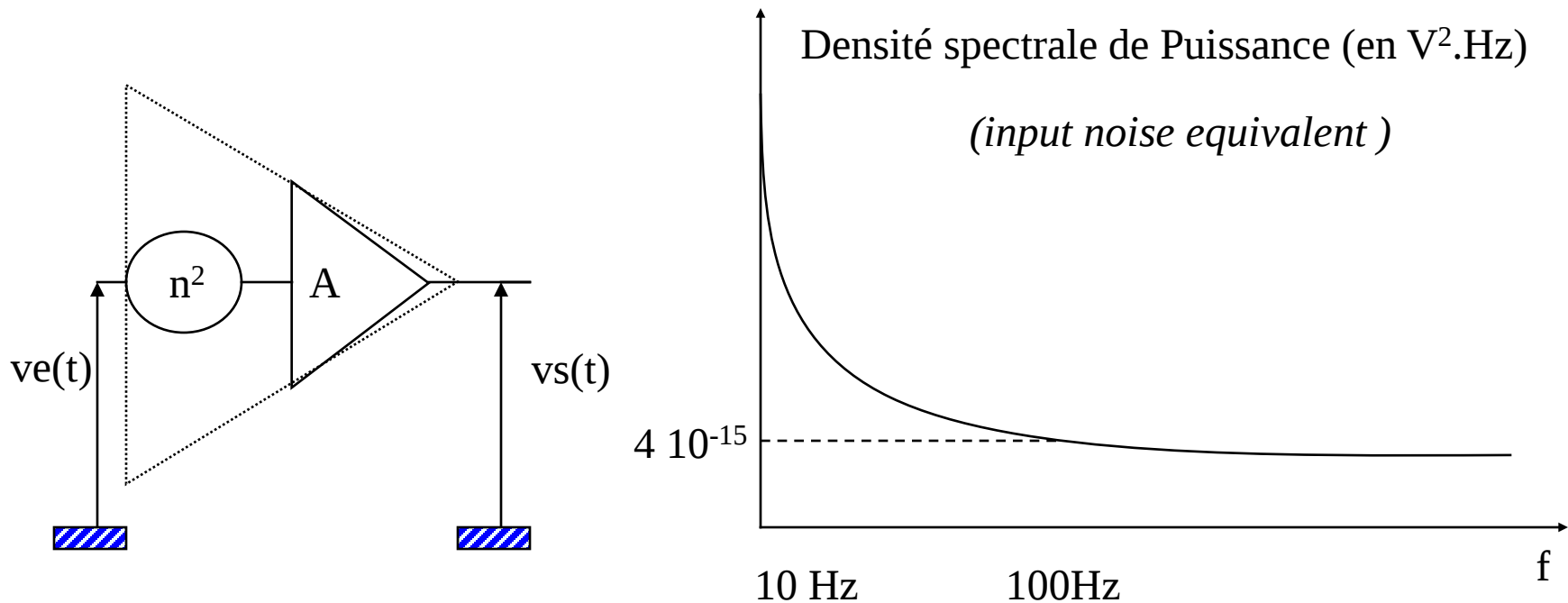
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_T(t) \cdot x_T^*(t) \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot X_T^*(f) \cdot df$$

donc :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df$$

# Exemple :Densité spectrale de puissance des amplificateurs opérationnels

Les amplificateurs opérationnels génèrent un bruit (semi-conducteur)  
équivalent en entrée → c'est une donnée constructeur

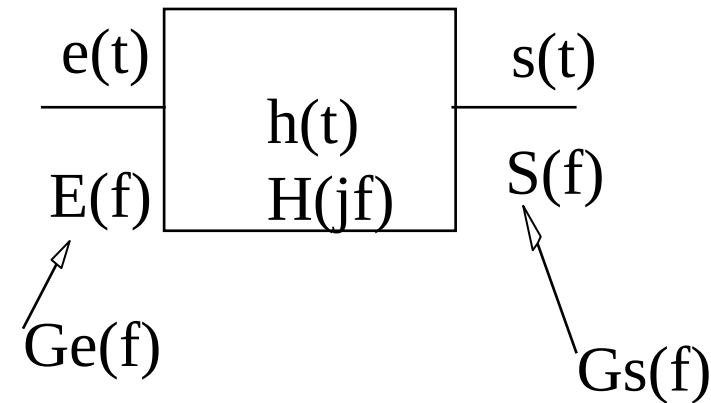


Elle représente la répartition de la puissance sur l'axe des fréquences.  
La densité spectrale de puissance est quadratique c'est-à-dire qu'elle est  
indépendante de la phase du signal. De plus elle est toujours réelle et positive.

## Fonction de transfert en puissance

Soit un système LIT tel que :

*On peut définir une DSP en entrée de Processus  $G_e(f)$  ou en sortie  $G_s(f)$ .*



**Dans ce cas  $G_s(f)$  devient :**

$$G_s(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot S(f) \cdot S^*(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} H(f) \cdot E(f) \cdot H^*(f) \cdot E^*(f)$$

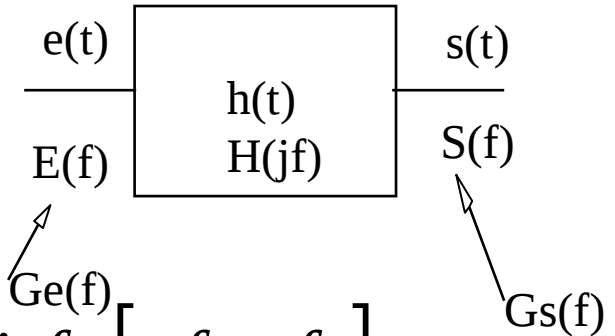
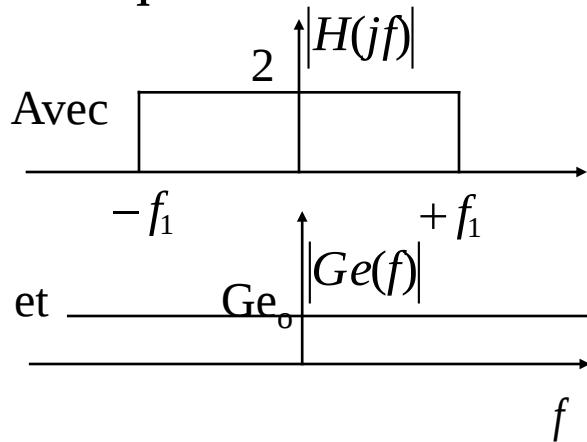
**On en déduit que :**

$$G_s(f) = |H(f)|^2 \cdot G_e(f)$$

Ce qui signifie qu' en connaissant la répartition spectrale de puissance de l'entrée et la fonction de transfert d'un système on peut en déduire la répartition spectrale de puissance de la sortie

# Fonction de transfert en puissance

Soit un système  $H$  linéaire et invariant dans le temps tel que :

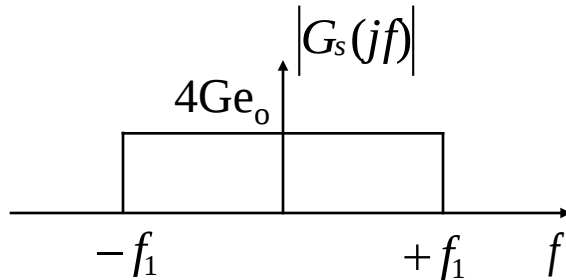


$$|H(jf)| = \begin{cases} 2 & \text{si } f \in [-f_1, +f_1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$|G_e(jf)| = G_{e_0} \quad \forall f$$

$$G_s(f) = |H(f)|^2 \cdot G_e(f)$$

Alors



$$|G_s(f)| = \begin{cases} 4G_{e_0} & \text{si } f \in [-f_1, +f_1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

# Annexes

## Densité spectrale de puissance

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T}$$

→ Mais comment avoir accès à  $|X_T(f)|^2$

→ Par la fonction d'autocorrélation

### Préambule

Pour comparer deux signaux  $x$  et  $y$ , on peut utiliser leur produit scalaire  $\langle x, y \rangle$ .

Cependant, les signaux ont une structure plus riche que les vecteurs de l'espace.

En effet, deux signaux peuvent paraître semblables (représentation graphique) alors que leur produit scalaire est nul : c'est le cas de deux signaux de même forme mais décalés (déphasés), leurs supports sont dit disjoints.

→ Pour exprimer ces ressemblances à une translation près, on introduit l'intégrale de corrélation.

# Fonction d'Autocorrélation

La fonction d'autocorrélation moyenne  $R_{xx}$  est définie telle que :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t+\tau) dt$$

Pour  $\tau=0$  la fonction d'autocorrélation s'écrit  $R_{xx}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t) dt$

Et selon l'égalité de Parseval

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t+\tau) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{IR} X_T(f) X_T^*(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{IR} X_T(f) X_T^*(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

# Fonction d'Autocorrélation

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T(f) X_T^*(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(f) \cdot X_T^*(f)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} \cdot df \quad \rightarrow \text{Transformée de Fourier inverse}$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot d\tau$$

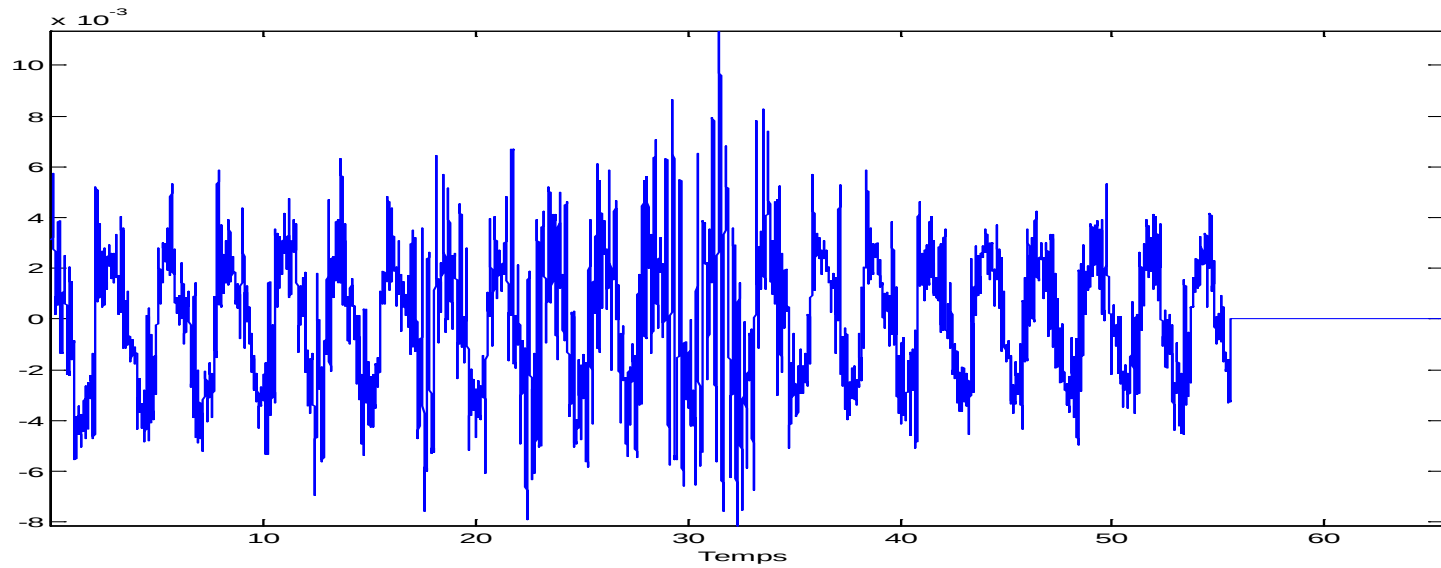
$\rightarrow$  Transformée de Fourier

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t+\tau) dt$$

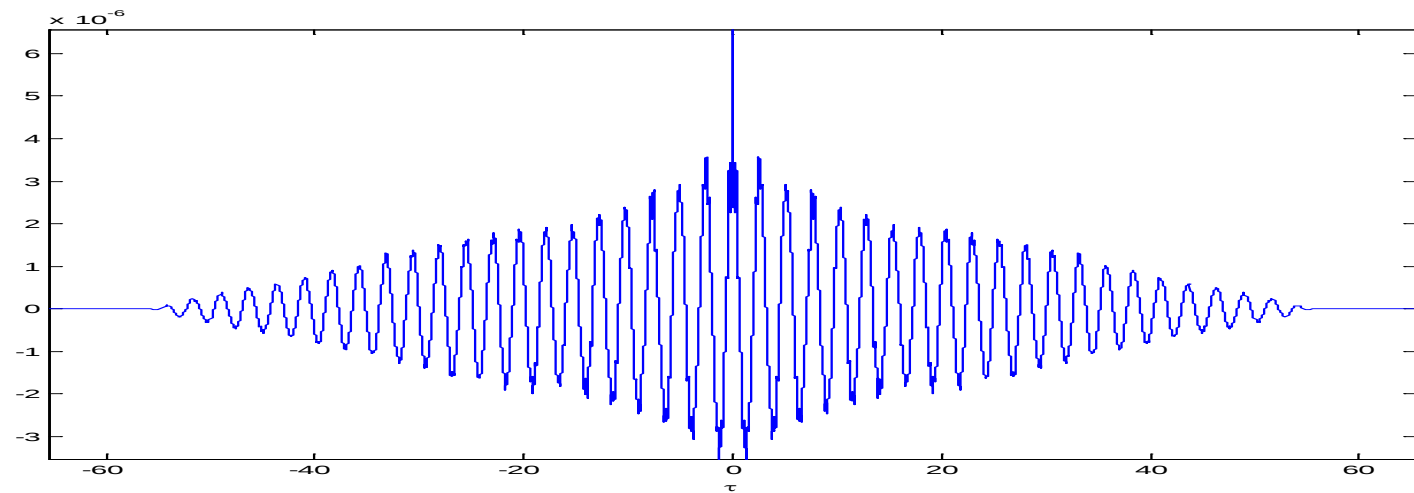
Relation de Wiener-Kintchine :

La densité spectrale de puissance d'un processus dont la valeur moyenne et la fonction d'autocorrélation sont invariantes dans le temps (stationnarité au sens large) est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrelation.

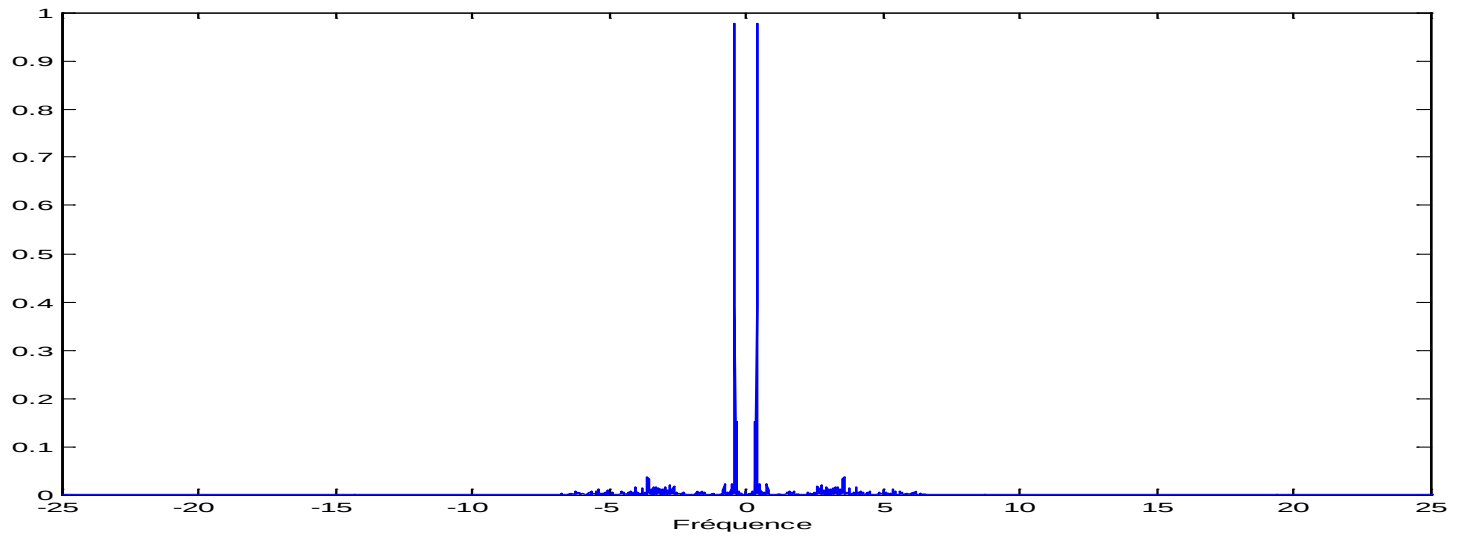
Signal  $x(t)$



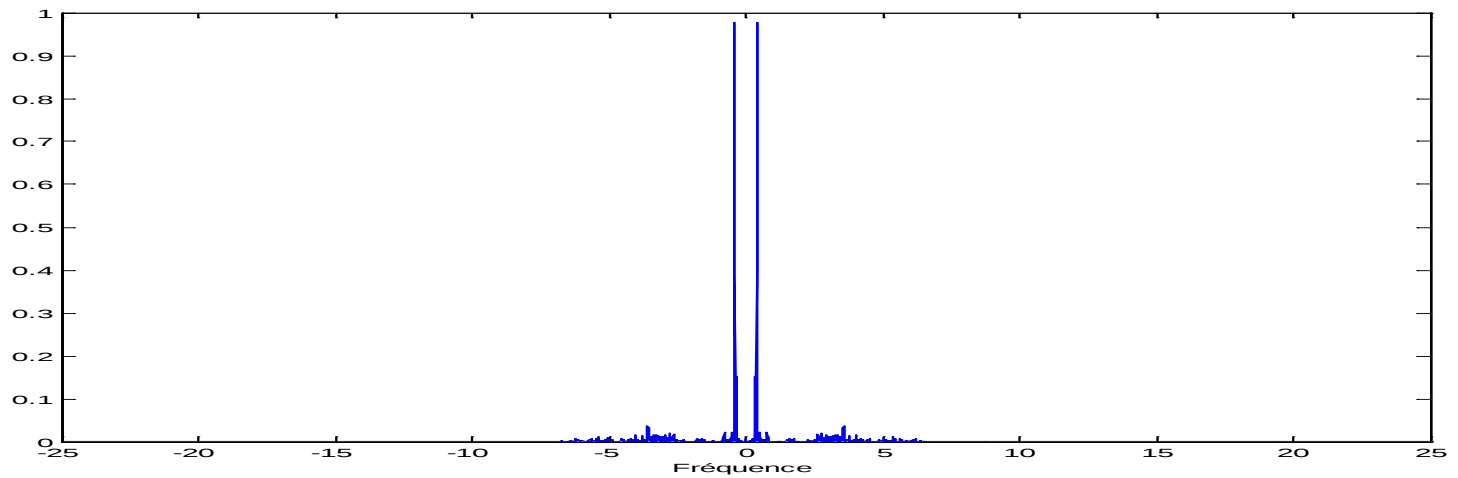
Autocorrélation  $R_{xx}(\tau)$



## Transformée de Fourier de $x(t)$

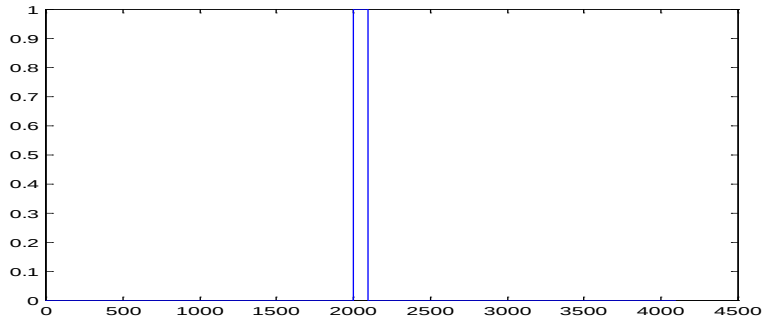


## Transformée de Fourier de $R_{xx}(\tau)$

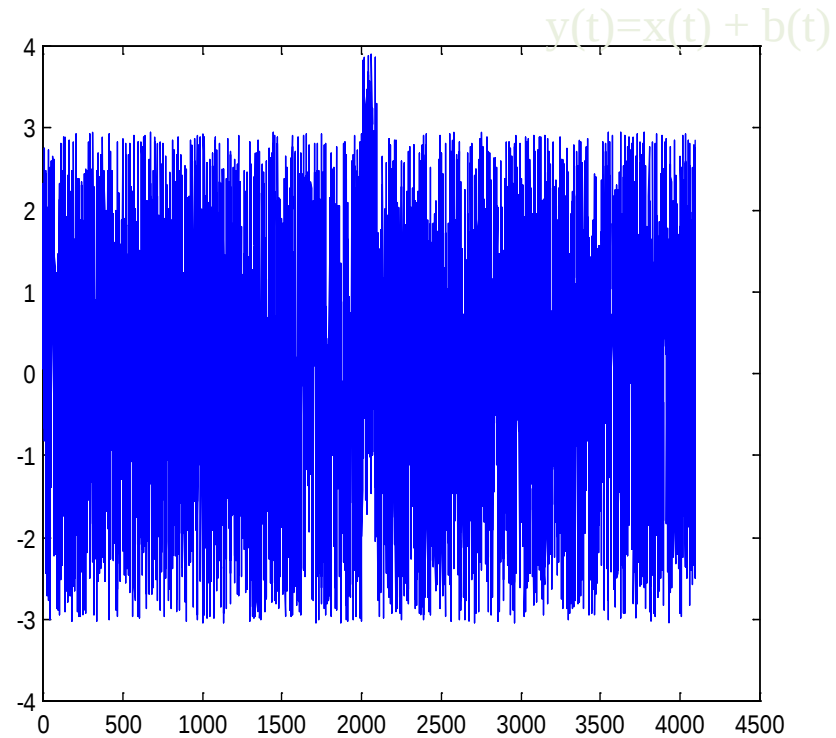
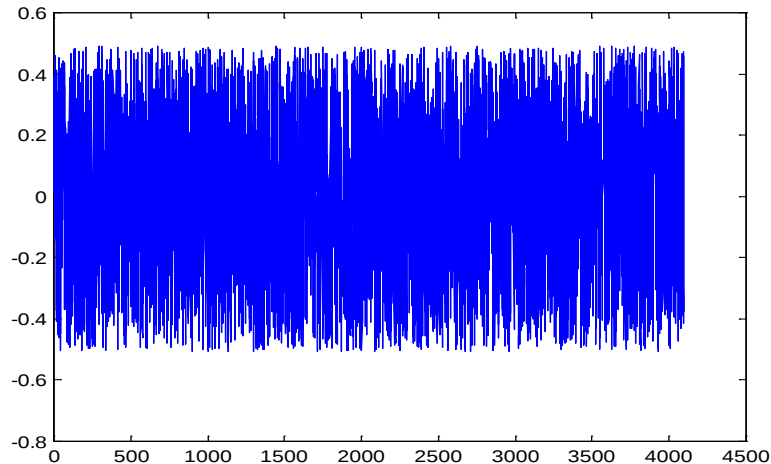


# FONCTION D'AUTOCORRELATION

$x(t) \rightarrow$  fenêtre rectangulaire

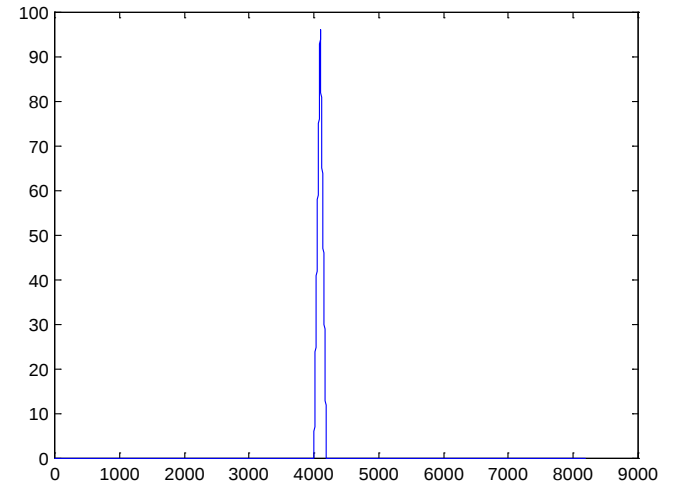
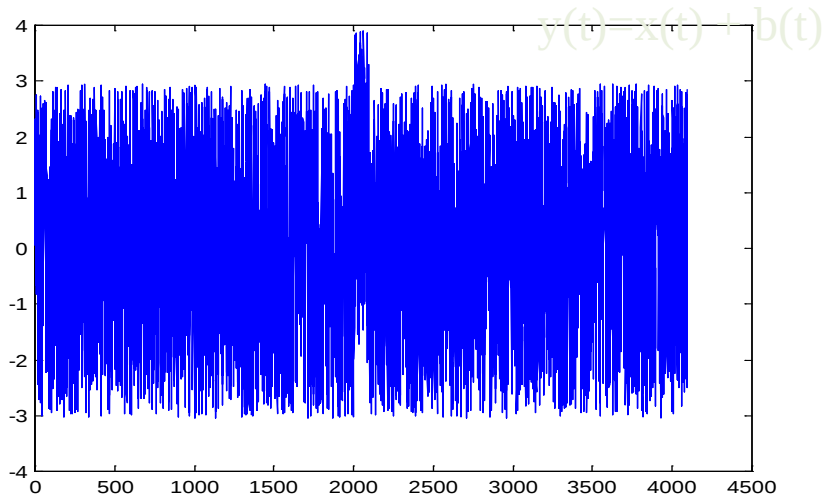


$b(t) \rightarrow$  bruit distribution normale  $\mu=0$   $\sigma=2$

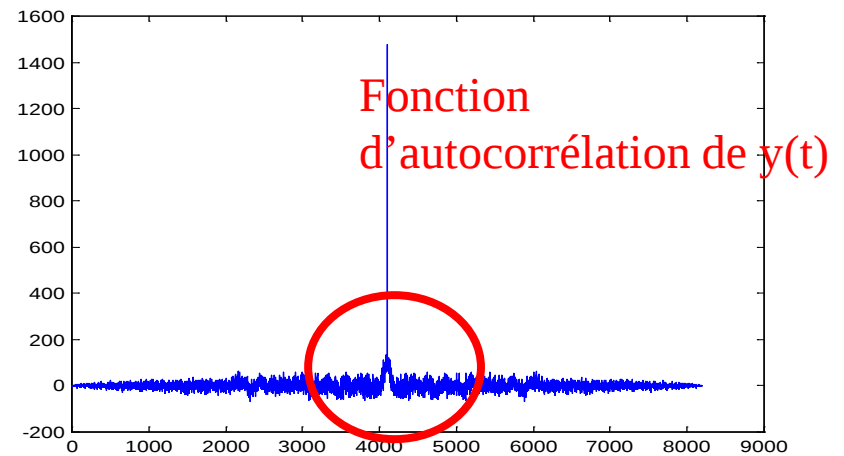
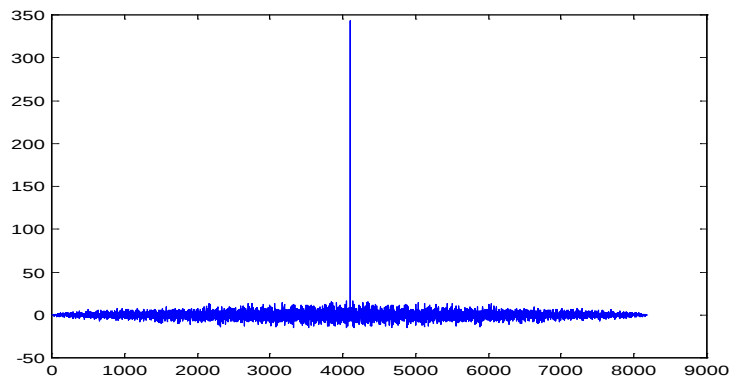


# FONCTION D'AUTOCORRELATION

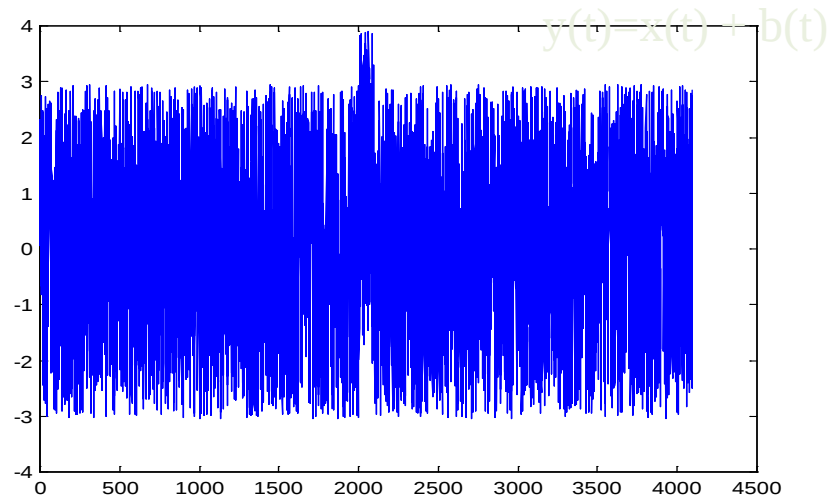
Autocorrélation de x



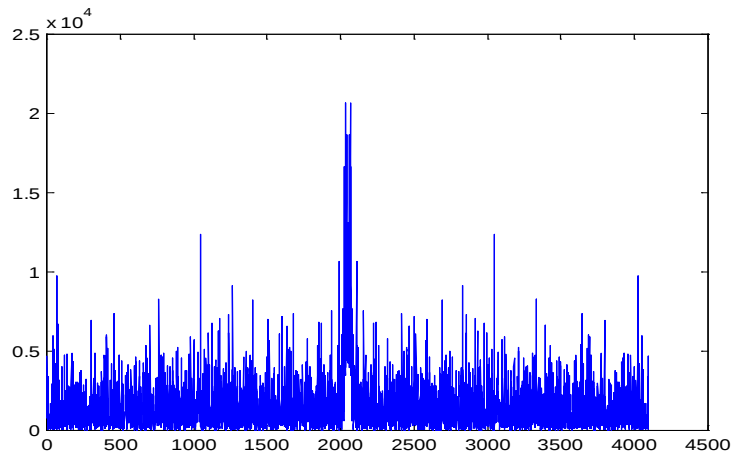
Autocorrélation de b(t)



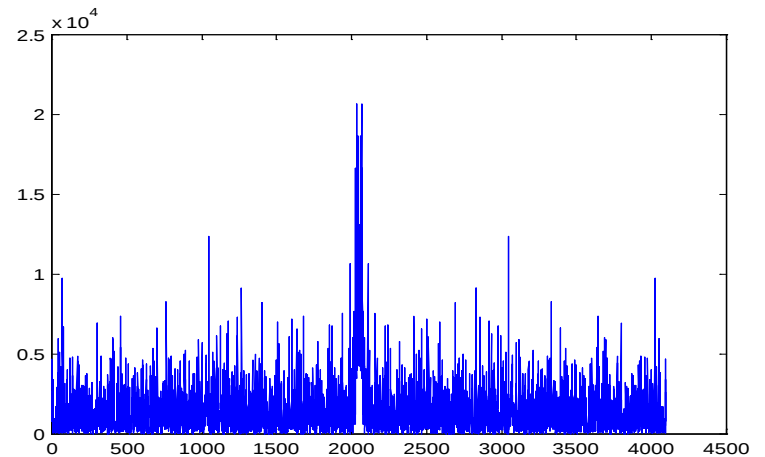
# FONCTION D'AUTOCORRELATION



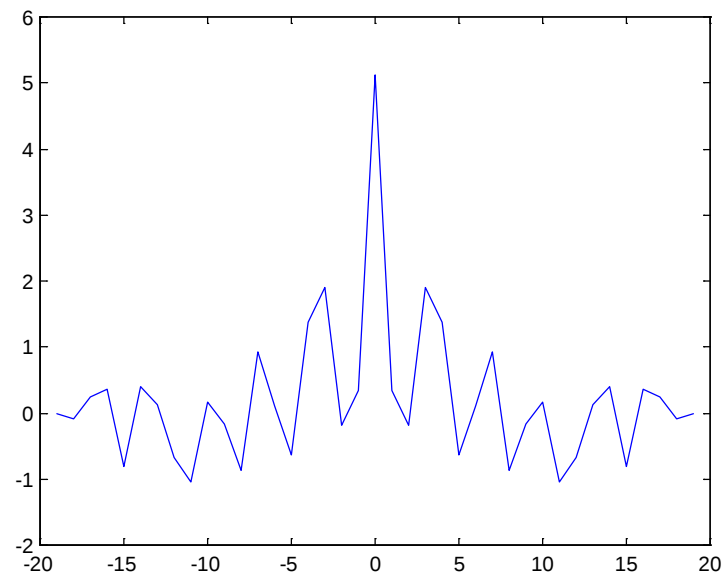
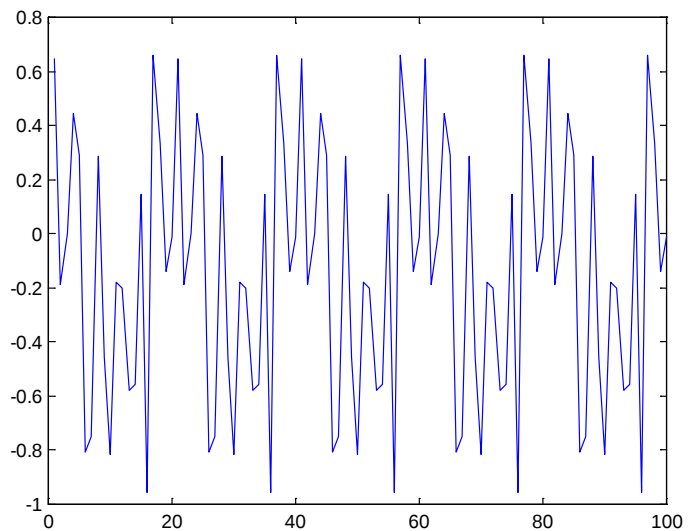
Transformée de Fourier de la fonction  
d'autocorrélation de  $y(t)$

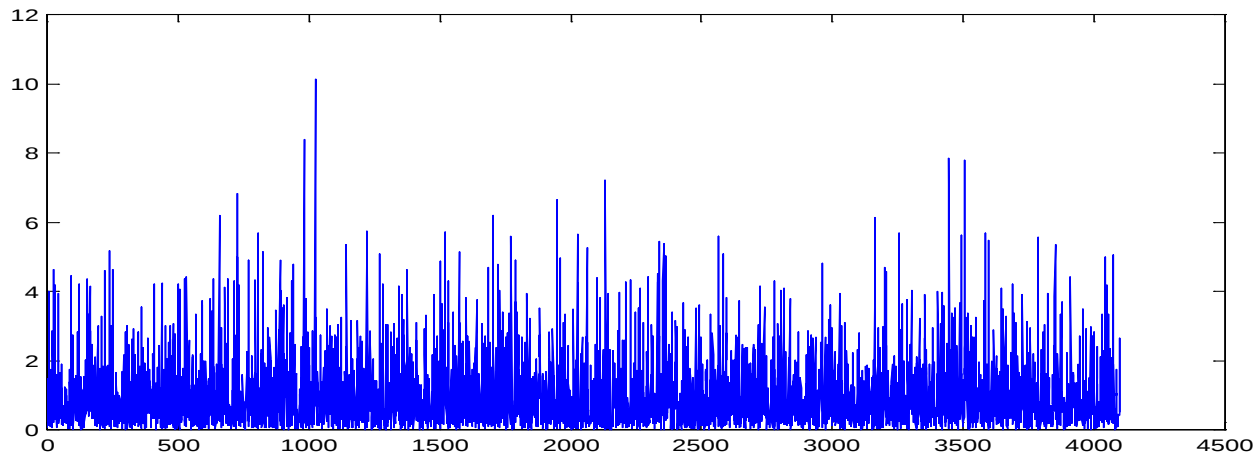


Densité spectrale de puissance ( $y \cdot y^*$ ) (f)

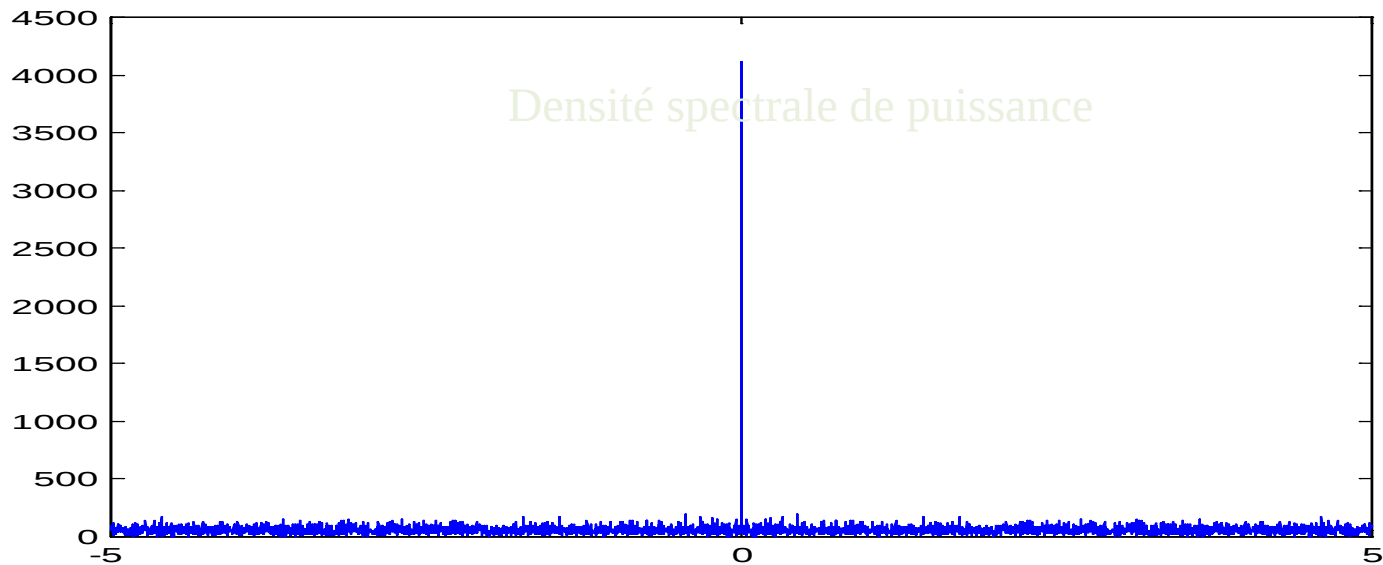


# FONCTION D'AUTOCORRELATION





Bruit  $n = \text{exprnd}(1, 4096, 1)$  distribution normale paramètre 1, 4096 points Temps(s)



→ La TF n'est pas accessible sous sa forme analytique

Fréquence (Hz)

# Annexe : Représentation des signaux par projection sur des bases de fonctions orthogonales

Signaux déterministes décrits par une fonction  $x(t)$

→ Cette fonction  $x(t)$  étant connue il est possible de calculer la transformation subie par le système : c'est l'équation de convolution ou la fonction de transfert

Définitions :

Soit l'espace  $E$  des fonctions possédant la propriété  $P$  ( exemple une périodicité  $T$ )

Elles constitue un espace vectoriel si :

- la combinaison linéaire de 2 fonctions de  $E \in E$   $(\alpha f_1 + \beta f_2) \in E$

- il existe un produit scalaire tel que :  $x(t) = \langle f_1, f_2 \rangle = \int_D f_1(u) f_2(u) du$

$f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de  $E$  et  $D$  leur domaine de définition

2 fonctions sont orthogonales si  $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_D f_1(u) f_2(u) du = 0$

Remarques :  $\langle f_1, f_2 \rangle \Rightarrow$  un scalaire       $\langle f_1, f_2 \rangle f_2 \Rightarrow$  une fonction