

Analyse
Master 1 de Mathématiques 2020-2021
Université de Lorraine

Frédéric Robert

17 septembre 2020

Résumé

Objectif : Maîtriser les outils d'analyse de base pour une utilisation professionnelle des mathématiques.

Ce cours d'"Analyse" est destiné aux étudiants de M1 Mathématiques, qu'ils/elles se destinent à l'agrégation ou la recherche bien entendu, mais aussi à une carrière plus appliquée. Quel que soit le choix professionnel, la maîtrise avec rigueur des outils d'analyse est indispensable.

Prérequis : Topologie (surtout sur les espaces métriques), Topologie des espaces vectoriels normés, projection sur un convexe fermé dans les espaces de Hilbert, Calcul Différentiel, Intégration. Des rappels seront donnés dans ces notes.

Que vous vous destiniez à "faire des mathématiques" dans l'enseignement secondaire, dans le milieu académique classique ou bien dans l'industrie, la finance, les assurances, il est indispensable d'avoir d'excellentes bases mathématiques, en particulier en Analyse.

Au-delà du talent et du savoir-faire dans la résolution des exercices et problèmes, on attendra de vous d'avoir de la méthode et de la rigueur. Par exemple, un théorème a des hypothèses, et il est évident qu'il faut les vérifier avant d'appliquer le-dit théorème. Dans un exercice, si vous n'avez pas vérifié les hypothèses, c'est dommage, ce sera faux... mais c'est tout. Si vous utilisez un super-calculateur couplé à un super-logiciel et que vous n'avez pas pris le soin de contrôler si vous les utilisez dans le bon cadre, les conséquences peuvent être un peu plus sérieuses...

Dans ce cours, nous partirons de structures très générales, puis nous nous spécialiserons avec des méthodes de plus en plus pointues. Le fil rouge de ces méthodes sera la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO), à savoir des équations différentielles en une seule variable. Chaque partie sera illustrée par une application dans ce domaine.

Ces notes sont organisées de la façon suivante :

La **Partie 1** est à la fois une révision et un approfondissement des notions de topologie métrique ou générale. Cette partie est aussi l'occasion de revoir diverses méthodes de raisonnements mathématiques. On s'attardera largement sur la notion de complétude et diverses applications, dont une première façon de résoudre des EDOs avec conditions initiales (Théorie de cauchy-Lipschitz).

Dans la **Partie 2**, on ajoutera de la structure en se concentrant sur les espaces vectoriels normés. Nous parlerons beaucoup d'applications linéaires continues : ce sera donc un mélange entre l'algèbre linéaire et la topologie, le lien étant fait par les normes. Nous verrons alors la méthode de continuité qui permettra de préserver la bijectivité de certaines applications, et du coup de résoudre "continuellement" divers problèmes. Comme applications, on parviendra à résoudre des EDOs avec données au bord (problèmes de type Dirichlet).

Dans la **Partie 3**, nous irons plus loin en imposant en plus une structure Hilbertienne. Au-delà du théorème de projection sur les convexes (qui sera brièvement rappelé), cette structure nous permettra d'avoir des théorèmes très généraux de résolutions d'équations (Stampacchia et Lax-Milgram). Nous verrons aussi une nouvelle topologie dite "faible" qui permettra d'obtenir une propriété de type "Bolzano-Weierstrass", et de résoudre des problèmes de minimisation. Enfin, Nous introduirons la transformée de Fourier qui permettra de changer la nature des certaines EDOs en leur donnant (parfois partiellement) une forme polynomiale, ce qui sera très utile sur un groupe topologique comme $\mathbb{R}$.

Dans la **Partie 4**, enfin, nous étudierons les espaces de Sobolev et les distributions en dimension 1 afin de résoudre quelques EDOS. Ce ne sera qu'une modeste introduction à des méthodes qui viennent des équations aux dérivées partielles (ou EDP, à plusieurs variables, donc).

Les références principales de ces notes sont les ouvrages de Brezis [?brezis], Dixmier [?dixmier] and Rudin [?rudinC]. D'excellentes références pour le cours de Licence sont les ouvrages d'Azoulay-Avignan et Auliac.

Partie 1 : Structure d'espace métrique et topologie générale

- Chapitre 1 : Espaces métriques
- Chapitre 2 : Topologie générale
- Chapitre 3 : Espaces complets
- Chapitre 4 : Théorème de Baire et Applications

Ce chapitre a bien entendu pour objectif de rappeler des définitions et résultats sur les espaces métriques, mais aussi de revoir des types de preuve.

I. Définitions

I.1. Distance et espace métrique

Definition (Espace métrique)

Soit X un ensemble. Une distance sur X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- **Positivité** $d(x, y) \geq 0$ pour tous $x, y \in X$, et $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- **Symétrie** $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$
- **Inégalité triangulaire** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

On dit alors que (X, d) est un espace métrique

I.2. Exemples classiques

- Sur $\mathbb{R}$, on prend $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. C'est bien une distance.
- Plus généralement, si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé (evn), $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_E(x, y) := \|x - y\|_E$ pour $x, y \in E$ est une distance.

I.3. Quelques exemples un peu moins évidents, voire des pièges

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. C'est aussi une distance sur $\mathbb{R}$.
- On se donne X, Y deux ensembles et d_Y une métrique sur Y . On se donne $\varphi : X \rightarrow Y$ une injection et pour $x, y \in X$, on définit $d_\varphi(x, y) = d_Y(\varphi(x), \varphi(y))$. Alors d_φ est une distance sur X . Par exemple, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$, et c'est bien une distance sur $\mathbb{R}$.
- La distance "à vol d'oiseau", qui marche bien pour les avions et les bateaux tant qu'il n'y a pas trop de vent...
- Le "temps de parcours", ou la "distance par la route" ne sont pas des distances en général!!! Il manque la symétrie. Aller de l'arrêt de tram "Vélodrome" à Nancy à l'arrêt "CHU Brabois" est sensiblement plus long que le trajet inverse, même en prenant la même route. Sur du plat, il peut y avoir des sens interdits qui augmentent la distance à parcourir. Utilisez un logiciel de recherche de trajet pour vous en convaincre. Bref : utiliser les distances au sens mathématiques est une simplification conséquente de la vie courante...

I.4. Boules

Definition (Boules)

Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on définit

$$B_d(x, r) := \{y \in X \text{ tel que } d(x, y) < r\},$$

$$\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X \text{ tel que } d(x, y) \leq r\}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera souvent $B(x, r)$ et $\bar{B}_d(x, r)$.

I.5. Produit

Proposition (Produit d'espaces métriques)

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $\delta : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\delta((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y') \text{ pour tous } (x, y), (x', y') \in X \times Y.$$

Alors δ est une distance sur $X \times Y$.

II. Voisinages, ouverts, fermés

II.1. Définitions

Definition (Voisinage)

Soit (X, d) un espace métrique. Soit un ensemble $A \subset X$ et $x \in X$. On dit que A est un voisinage de x si il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$.

Definition (Ensemble ouvert)

Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble $A \subset X$ est dit "ouvert pour la distance d " si :

- *Soit $A = \emptyset$,*
- *Soit pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d(a, r) \subset A$.*

En d'autres termes, A est ouvert s'il est vide ou bien s'il est voisinage de tous ses points.

Definition (Ensemble fermé)

Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

Remarque : si deux normes sur un evn sont équivalentes, alors elles définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés (ce sera vu en exercice). Du coup, en dimension finie, on parlera d'ouverts et de fermés, étant sous-entendu que ces notions se rapportent à une distance issue d'une norme, et que, les normes étant équivalentes, ces notions sont indépendantes du choix de la norme.

Exercise

On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. On munit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la distance produit δ . Montrez que les ouverts de $(\mathbb{R}^2, \delta)$ sont exactement les ouverts de $\mathbb{R}^2$ munie de la norme infinie $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II.2. Des propriétés en lien avec la topologie générale (qui sera vue plus tard)

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. Alors

- $\emptyset$ et X sont des ouverts ;
- Toute union d'ouverts est ouverte (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un ouvert de X pour tout $i \in I$, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de X).
- Toute intersection finie d'ouverts est ouverte (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un ouvert de X pour tout $i \in I$, et I est finie, alors $\cap_{i \in I} A_i$ est un ouvert de X).

En passant au complémentaire, on a donc

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. Alors

- $\emptyset$ et X sont des fermés ;
- Toute intersection de fermés est fermée (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un fermé de X pour tout $i \in I$, alors $\cap_{i \in I} A_i$ est un fermé de X).
- Toute union finie de fermés est fermée (c'est-à-dire pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que A_i est un fermé de X pour tout $i \in I$, et I est finie, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est un fermé de X).

II.3. Quelques exemples dans $\mathbb{R}$:

- L'ensemble $]0, 1[$ est ouvert.

Preuve : Soit $x \in]0, 1[$. On s'aide d'un dessin pour avoir l'intuition que $B(x, r) =]x - r, x + r[\subset]0, 1[$ avec $r = \min\{x, 1 - x\}/2$. On a bien $r > 0$ car $x > 0$ et $x < 1$. Pour montrer que $]x - r, x + r[\subset]0, 1[$, on se donne Soit $y \in]x - r, x + r[$ arbitraire. On a donc $y > x - r \geq x - x/2 = x/2 > 0$, et $1 - y > 1 - (x + r) = 1 - x - r \geq 1 - x - (1 - x)/2 = (1 - x)/2 > 0$, donc $0 < y < 1$, donc $y \in]0, 1[$. Ceci prouve que $]x - r, x + r[\subset]0, 1[$, et donc $]0, 1[$ est un ouvert. $\square$

- L'ensemble $[2, 3]$ est fermé.

Preuve : On va montrer que $[2, 3]^c =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ est ouvert. Montrons que $] - \infty, 2[$ est ouvert. Soit $x \in] - \infty, 2[$: en s'aidant d'un dessin pour l'intuition, on va montrer que $]x - r, x + r[\subset] - \infty, 2[$ avec $r = (2 - x)/2 > 0$. En effet, pour $y \in]x - r, x + r[$, on a $y < x + r = (2 + x)/2 < 2$, donc $y \in] - \infty, 2[$. Donc $]x - r, x + r[\subset] - \infty, 2[$, puis $] - \infty, 2[$ est ouvert. De même $]3, +\infty[$ est ouvert et donc $] - \infty, 2[\cup]3, +\infty[$ est ouvert comme union d'ouverts. Et donc $[2, 3]$ est fermé. $\square$

- L'ensemble $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Preuve : Supposons que $[0, 1[$ est ouvert. On voit sur un dessin que c'est en 0 que ça va clocher. Comme $0 \in [0, 1[$, si c'est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $] - r, r[\subset [0, 1[$, donc $-r/2 \in] - r, r[\subset [0, 1[$, ce qui est absurde car $-r/2 < 0$. Donc $[0, 1[$ n'est pas ouvert.

Supposons que $[0, 1[$ est fermé : on voit que c'est en 1 qu'on aura un problème. Si c'est fermé, alors $[0, 1]^c =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ est ouvert et contient 1, donc il existe $r > 0$ tel que $]1 - r, 1 + r[\subset]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. On s'aide d'un dessin pour prendre $s > 0$ tel que $s < r$ et $s < 1$: on a donc $1 - s \in]1 - r, 1 + r[$, mais $1 - s \notin]-\infty, 0[$ (car $1 - s > 0$) et $1 - s \notin]1, +\infty[$ (car $s > 0$). Donc $1 - s \notin [0, 1]^c$ mais $1 - s \in]1 - r, 1 + r[$, ce qui est une contradiction. Donc $[0, 1[$ n'est pas fermé. $\square$

Conclusion : $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé

Proposition

Dans un espace métrique, toute boule ouverte est ouverte (ouf) et toute boule fermée est fermée (ouf encore).

Preuve en TD.

II.4. Distance induite

Definition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X . On appelle distance induite par d sur Y la distance $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_Y(x, y) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in Y$.

On se trouve alors avec des notions d'ouverts et de fermés du sous-ensemble.

Proposition

Dans un espace métrique, toute boule ouverte est ouverte (ouf) et toute boule fermée est fermée (ouf encore).

Preuve en TD.

II.4. Distance induite

Definition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X . On appelle distance induite par d sur Y la distance $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_Y(x, y) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in Y$.

On se trouve alors avec des notions d'ouverts et de fermés du sous-ensemble.

Mais attention ! Les notions ne coïncident pas toujours avec celle de l'ensemble initial.

Exemple : On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. L'ensemble $]0, 1[$ est ouvert pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On munit $]0, 1[$ de la distance induite : alors $]0, 1[$ est à la fois **ouvert et fermé** pour la distance induite. De même, en munissant $[0, 1[$ de la distance induite, c'est à la fois un ouvert et un fermé.

Proposition

Dans un espace métrique, toute boule ouverte est ouverte (ouf) et toute boule fermée est fermée (ouf encore).

Preuve en TD.

II.4. Distance induite

Definition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X . On appelle distance induite par d sur Y la distance $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_Y(x, y) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in Y$.

On se trouve alors avec des notions d'ouverts et de fermés du sous-ensemble.

Mais attention ! Les notions ne coïncident pas toujours avec celle de l'ensemble initial.

Exemple : On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. L'ensemble $]0, 1[$ est ouvert pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On munit $]0, 1[$ de la distance induite : alors $]0, 1[$ est à la fois **ouvert et fermé** pour la distance induite. De même, en munissant $[0, 1[$ de la distance induite, c'est à la fois un ouvert et un fermé. A retenir :

Les notions d'ouverts et de fermés dépendent de l'ensemble et de la distance ambiants

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

(i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.

(ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

(i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.

(ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Exemple : $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, +\infty[$.

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

(i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.

(ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Exemple : $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, +\infty[$.

Preuve : On va commencer par un petit résultat bien utile : pour $x \in Y$ et $r > 0$, on a

$$B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y.$$

[Tableau]

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

(i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.

(ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Exemple : $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, +\infty[$.

Preuve : On va commencer par un petit résultat bien utile : pour $x \in Y$ et $r > 0$, on a

$$B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y.$$

[Tableau] Prouvons maintenant la proposition. On se donne $A \subset Y$. On va montrer

(i) par **double implication**.

[Tableau]

La preuve de (ii) se fait en passant au complémentaire.

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

(i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.

(ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Exemple : $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, +\infty[$.

Preuve : On va commencer par un petit résultat bien utile : pour $x \in Y$ et $r > 0$, on a

$$B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y.$$

[Tableau] Prouvons maintenant la proposition. On se donne $A \subset Y$. On va montrer

(i) par **double implication**.

[Tableau]

La preuve de (ii) se fait en passant au complémentaire. Pour tout ensemble $Z \subset X$, on notera $Z^c = X \setminus Z$ le complémentaire dans X . Pour $B \subset X$, on remarque que

$$Y \setminus (B \cap Y) = Y \cap (B \cap Y)^c = Y \cap (B^c \cup Y^c) = (Y \cap B^c) \cup (Y \cap Y^c) = Y \cap B^c.$$

On se donne $A \subset Y$.

[Tableau]

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X qu'on munit de la distance induite. Soit $A \subset Y$. Alors

(i) $\{A \text{ ouvert de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ ouvert de } X\}$.

(ii) $\{A \text{ fermé de } Y\} \Leftrightarrow \{A = B \cap Y \text{ avec } B \text{ fermé de } X\}$.

Pour simplifier, on n'a pas noté les distances. En toute rigueur, on aurait du noter A ouvert de (Y, d_Y) et B ouvert de (X, d) avec d_Y la distance induite

Exemple : $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, +\infty[$.

Preuve : On va commencer par un petit résultat bien utile : pour $x \in Y$ et $r > 0$, on a

$$B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y.$$

[Tableau] Prouvons maintenant la proposition. On se donne $A \subset Y$. On va montrer

(i) par **double implication**.

[Tableau]

La preuve de (ii) se fait en passant au complémentaire. Pour tout ensemble $Z \subset X$, on notera $Z^c = X \setminus Z$ le complémentaire dans X . Pour $B \subset X$, on remarque que

$$Y \setminus (B \cap Y) = Y \cap (B \cap Y)^c = Y \cap (B^c \cup Y^c) = (Y \cap B^c) \cup (Y \cap Y^c) = Y \cap B^c.$$

On se donne $A \subset Y$.

[Tableau]

II.5. Caractérisation des fermés par les suites

II.5.1. Rappel :

Definition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$). Soit $l \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers l si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, \{n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon\}.$$

Dans ce cas, l est unique : on l'appelle "la limite de (x_n) lorsque $n \rightarrow \infty$ ", et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n := l$.

II.5. Caractérisation des fermés par les suites

II.5.1. Rappel :

Definition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$). Soit $l \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers l si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, \{n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon\}.$$

Dans ce cas, l est unique : on l'appelle "la limite de (x_n) lorsque $n \rightarrow \infty$ ", et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n := l$.

Remarque : ici, n_0 dépend de $\epsilon > 0$, et on notera parfois $n_0 = n_0(\epsilon)$ pour insister sur cela. Il faut prendre l'habitude de "pister" la dépendance des diverses constantes utilisées : cela permet de bien **comprendre qui dépend de quoi**, et surtout d'éviter de très grosses erreurs.

II.5. Caractérisation des fermés par les suites

II.5.1. Rappel :

Definition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on note $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$). Soit $l \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers l si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, \{n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < \epsilon\}.$$

Dans ce cas, l est unique : on l'appelle "la limite de (x_n) lorsque $n \rightarrow \infty$ ", et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n := l$.

Remarque : ici, n_0 dépend de $\epsilon > 0$, et on notera parfois $n_0 = n_0(\epsilon)$ pour insister sur cela. Il faut prendre l'habitude de "**pister**" la dépendance des diverses constantes utilisées : cela permet de bien **comprendre qui dépend de quoi**, et surtout d'éviter de très grosses erreurs.

II.5.2. La caractérisation séquentielle

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$ un ensemble. On a l'équivalence suivante :

(i) A est fermé

(ii) Pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers $l \in X$, alors $\{x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow l \in A$.

elle se fait par double implication.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

[Tableau]

elle se fait par double implication.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

[Tableau]

$(ii) \Rightarrow (i)$.

[Tableau]

elle se fait par double implication.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

[Tableau]

$(ii) \Rightarrow (i)$.

[Tableau]

II.5.3. Cette caractérisation est souvent très commode.

elle se fait par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

[Tableau]

(ii) $\Rightarrow$ (i).

[Tableau]

II.5.3. Cette caractérisation est souvent très commode. Reprenons par exemple la preuve de $[0, 1[$ ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$:

elle se fait par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

[Tableau]

(ii) $\Rightarrow$ (i).

[Tableau]

II.5.3. Cette caractérisation est souvent très commode. Reprenons par exemple la preuve de $[0, 1[$ ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$:

Ce n'est **pas un fermé** :

elle se fait par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

[Tableau]

(ii) $\Rightarrow$ (i).

[Tableau]

II.5.3. Cette caractérisation est souvent très commode. Reprenons par exemple la preuve de $[0, 1[$ ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$:

Ce n'est pas un fermé : en effet, la suite $(\frac{n}{n+1})_n$ est dans $[0, 1[$ et converge vers $1 \notin [0, 1[$.

elle se fait par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

[Tableau]

(ii) $\Rightarrow$ (i).

[Tableau]

II.5.3. Cette caractérisation est souvent très commode. Reprenons par exemple la preuve de $[0, 1[$ ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$:

Ce n'est **pas un fermé** : en effet, la suite $(\frac{n}{n+1})_n$ est dans $[0, 1[$ et converge vers $1 \notin [0, 1[$.

Si c'est ouvert, alors $[0, 1[^c] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ est **fermé**. Or $(\frac{-1}{n+1})_n$ est dans $]1, +\infty[$ et converge vers $0 \notin]1, +\infty[$, donc ce n'est pas un fermé. Donc $[0, 1[$ n'est **pas ouvert**.

elle se fait par double implication.

(i) $\Rightarrow$ (ii).

[Tableau]

(ii) $\Rightarrow$ (i).

[Tableau]

II.5.3. Cette caractérisation est souvent très commode. Reprenons par exemple la preuve de $[0, 1[$ ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$:

Ce n'est **pas un fermé** : en effet, la suite $(\frac{n}{n+1})_n$ est dans $[0, 1[$ et converge vers $1 \notin [0, 1[$.

Si c'est ouvert, alors $[0, 1[^c] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ est **fermé**. Or $(\frac{-1}{n+1})_n$ est dans $]1, +\infty[$ et converge vers $0 \notin]1, +\infty[$, donc ce n'est pas un fermé. Donc $[0, 1[$ n'est **pas ouvert**.

Conclusion : $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

III.1. Définition et premiers exemples

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III. Intérieur et adhérence

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $Int(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$Int(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $Int([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $Int(A) \subset A$
- $Int(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{Int(A) = A\}$
- $Int(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• **Preuve de $Int(A) \subset A$:**

[Tableau]

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• *Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:*

[Tableau]

• *Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :*

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• **Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:**

[Tableau]

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :** Si $\text{Int}(A)$ est vide, c'est bon. Sinon soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$. On se dit que $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

[Tableau]

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• **Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:**

[Tableau]

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :** Si $\text{Int}(A)$ est vide, c'est bon. Sinon soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$. On se dit que $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

[Tableau]

• **Preuve de $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$.**

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• **Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:**

[Tableau]

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :** Si $\text{Int}(A)$ est vide, c'est bon. Sinon soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$. On se dit que $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

[Tableau]

• **Preuve de $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$.** On va raisonner par double implication.
 $(\Rightarrow)$ **[Tableau]**

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• **Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:**

[Tableau]

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :** Si $\text{Int}(A)$ est vide, c'est bon. Sinon soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$. On se dit que $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

[Tableau]

• **Preuve de $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$.** On va raisonner par double implication.

($\Rightarrow$) **[Tableau]**

($\Leftarrow$) On suppose que $A = \text{Int}(A)$.

III.1. Définition et premiers exemples

Definition (Intérieur)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On appelle intérieur de A , et on note $\text{Int}(A)$, l'ensemble des points de X dont A est voisinage. En d'autres termes,

$$\text{Int}(A) = \{x \in X / \exists r > 0 \text{ tel que } B_d(x, r) \subset A\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}$, $\text{Int}([0, 1[) = \text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$. (A traiter en exercice).

III.2. Caractérisation de l'intérieur parmi les ouverts

Propriétés : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $\text{Int}(A) \subset A$
- $\text{Int}(A)$ est un ouvert de X
- $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$
- $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A

• **Preuve de $\text{Int}(A) \subset A$:**

[Tableau]

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ ouvert de X :** Si $\text{Int}(A)$ est vide, c'est bon. Sinon soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$. On se dit que $B_d(x, r) \subset \text{Int}(A)$, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

[Tableau]

• **Preuve de $\{A \text{ ouvert}\} \Leftrightarrow \{\text{Int}(A) = A\}$.** On va raisonner par double implication.

($\Rightarrow$) **[Tableau]**

($\Leftarrow$) On suppose que $A = \text{Int}(A)$.

- Preuve de $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A .

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A .** On va montrer que

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A .** On va montrer que

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

Ceci va se faire par double inclusion.

($\subset$) **[Tableau]**

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A .** On va montrer que

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

Ceci va se faire par double inclusion.

($\subset$) **[Tableau]**

($\supset$) On se donne $O \subset A$ ouvert. **[Tableau]**

• **Preuve de $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A .** On va montrer que

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{O \subset A \text{ ouvert}} O.$$

Ceci va se faire par double inclusion.

($\subset$) **[Tableau]**

($\supset$) On se donne $O \subset A$ ouvert. **[Tableau]** On a donc prouvé que si $O \subset A$ ouvert, alors $O \subset \text{Int}(A)$, comme $\text{Int}(A)$ ouvert, c'est donc le plus grand ouvert qui contient A (s'il y en a deux, ils sont égaux).

III.3. Définition de l'adhérence

Definition (Adhérence)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est adhérent à A si pour tout ouvert V de X tel que $x \in V$, alors $V \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A , et donc, en d'autres termes,

$$\bar{A} = \{x \in X \text{ tels que pour tout } V \subset X \text{ ouvert tel que } x \in V, \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset\}$$

III.3. Définition de l'adhérence

Définition (Adhérence)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est adhérent à A si pour tout ouvert V de X tel que $x \in V$, alors $V \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A , et donc, en d'autres termes,

$$\bar{A} = \{x \in X \text{ tels que pour tout } V \subset X \text{ ouvert tel que } x \in V, \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset\}$$

Exemples : dans $\mathbb{R}^2$. **[Tableau]**

III.3. Définition de l'adhérence

Definition (Adhérence)

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est adhérent à A si pour tout ouvert V de X tel que $x \in V$, alors $V \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A , et donc, en d'autres termes,

$$\bar{A} = \{x \in X \text{ tels que pour tout } V \subset X \text{ ouvert tel que } x \in V, \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset\}$$

Exemples : dans $\mathbb{R}^2$. [Tableau]

III.4. Formes équivalentes

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. On pose

$$A_1 := \{x \in X \text{ tels que pour tout } V \subset X \text{ voisinage de } x, \text{ alors } V \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A_2 := \{x \in X \text{ tels que pour tout } r > 0, \text{ alors } B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Alors $A_1 = A_2 = \bar{A}$.

La preuve fera l'objet d'un exercice.

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Alors

$$\bar{A} = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n / (x_n)_n \text{ suite convergente dans } X \text{ avec } x_n \in A \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \right\}$$

La preuve fera l'objet d'un exercice.

III.5. Propriétés générales On a les propriétés duales de celles de l'intérieur : Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On a alors :

- $A \subset \bar{A}$
- $\bar{A}$ est un **fermé** de X
- $\{A \text{ fermé}\} \Leftrightarrow \{\bar{A} = A\}$
- $\bar{A}$ est le **plus petit fermé** contenant A .

La preuve sera faite en exercice ou en devoir.

IV.1. Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x_0 \in X$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \{d_X(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon\}.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point.

IV.1. Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x_0 \in X$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \{d_X(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon\}.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point.

Important ! Ici $\alpha = \alpha(x_0, \epsilon)$ dépend à la fois de ϵ et $x_0 \in X$.

IV.1. Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x_0 \in X$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \{d_X(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon\}.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point.

Important ! Ici $\alpha = \alpha(x_0, \epsilon)$ dépend à la fois de ϵ et $x_0 \in X$.

Notations : On note $C((X, d_X), (Y, d_Y))$ l'ensemble des fonctions continues de (X, d_X) dans (Y, d_Y) . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et afin d'alléger les notations, on notera simplement $C(X, Y)$, ou $C^0(X, Y)$. On notera aussi

$C(X) = C(X, \mathbb{R}) = C^0(X, \mathbb{R})$, avec $\mathbb{R}$ muni de la topologie associée à la valeur absolue.

IV. Fonctions continues

IV.1. Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x_0 \in X$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \{d_X(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon\}.$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point.

Important ! Ici $\alpha = \alpha(x_0, \epsilon)$ dépend à la fois de ϵ et $x_0 \in X$.

Notations : On note $C((X, d_X), (Y, d_Y))$ l'ensemble des fonctions continues de (X, d_X) dans (Y, d_Y) . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, et afin d'alléger les notations, on notera simplement $C(X, Y)$, ou $C^0(X, Y)$. On notera aussi

$C(X) = C(X, \mathbb{R}) = C^0(X, \mathbb{R})$, avec $\mathbb{R}$ muni de la topologie associée à la valeur absolue.

IV.2. Caractérisation par les suites

Proposition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $x \in X$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue en x ;
- (ii) pour toute suite $(x_n)_n$ de X qui converge vers x , alors $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$ dans Y .

La preuve sera traitée en exercice.

IV.3. Structure algébrique

Proposition

Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

IV.3. Structure algébrique

Proposition

Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

IV.4. Homéomorphismes

Définition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques est une bijection continue dont l'inverse est continu. Deux espaces métriques sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme entre eux.

IV.3. Structure algébrique

Proposition

Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

IV.4. Homéomorphismes

Definition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques est une bijection continue dont l'inverse est continu. Deux espaces métriques sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme entre eux.

Exemples et contre-exemples : • La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \geq 0$ est un **homéomorphisme** dont l'inverse est $x \mapsto \sqrt{x}$.

IV.3. Structure algébrique

Proposition

Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

IV.4. Homéomorphismes

Definition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques et une bijection continue dont l'inverse est continu. Deux espaces métriques sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme entre eux.

- Exemples et contre-exemples :**
- La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \geq 0$ est un **homéomorphisme** dont l'inverse est $x \mapsto \sqrt{x}$.
 - Deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ sont **homéomorphes** (Exercice).

IV.3. Structure algébrique

Proposition

Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

IV.4. Homéomorphismes

Definition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques et une bijection continue dont l'inverse est continu. Deux espaces métriques sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme entre eux.

Exemples et contre-exemples : • La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \geq 0$ est un **homéomorphisme** dont l'inverse est $x \mapsto \sqrt{x}$.

- Deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ sont **homéomorphes** (Exercice).
- La fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f :]-1, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{array} \right.$$

est une **bijection** dont l'inverse est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R} & \rightarrow &]-1, 1[\\ y & \mapsto & \frac{2}{\pi} \arctan(y) \end{array} \right.$$

IV.3. Structure algébrique

Proposition

Toute composée de fonction continues est continue.

Toute somme, produit, quotient, combinaison linéaire de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue lorsque cela fait sens. C'est un peu plus subtil lorsqu'on est à valeurs dans un evn.

IV.4. Homéomorphismes

Definition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques et une bijection continue dont l'inverse est continu. Deux espaces métriques sont homéomorphes lorsqu'il existe un homéomorphisme entre eux.

Exemples et contre-exemples : • La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \geq 0$ est un **homéomorphisme** dont l'inverse est $x \mapsto \sqrt{x}$.

- Deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ sont **homéomorphes** (Exercice).
- La fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f :]-1, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{array} \right.$$

est une **bijection** dont l'inverse est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R} & \rightarrow &]-1, 1[\\ y & \mapsto & \frac{2}{\pi} \arctan(y) \end{array} \right.$$

Donc f est un **homéomorphisme**. Du coup, $] - 1, 1[$ est $\mathbb{R}$ homéomorphes.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- Cela n'est plus valable en général.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{lll} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**. Mais **f^{-1} n'est pas continue !**

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**. Mais **f^{-1} n'est pas continue !** Le problème ne peut être qu'en 2π et 0 :

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**. Mais **f^{-1} n'est pas continue !** Le problème ne peut être qu'en 2π et 0 : en effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2\pi - \frac{1}{n}) = e^{2i\pi} = e^0 = f(0)$

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**. Mais **f^{-1} n'est pas continue !** Le problème ne peut être qu'en 2π et 0 : en effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2\pi - \frac{1}{n}) = e^{2i\pi} = e^0 = f(0)$, et donc, en posant $y_n := f(2\pi - \frac{1}{n})$ pour $n \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1).$$

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**. Mais **f^{-1} n'est pas continue !** Le problème ne peut être qu'en 2π et 0 : en effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2\pi - \frac{1}{n}) = e^{2i\pi} = e^0 = f(0)$, et donc, en posant $y_n := f(2\pi - \frac{1}{n})$ pour $n \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1).$$

Donc **f^{-1} n'est pas continue**.

- Plus généralement, soit $f : I \rightarrow J$ une **bijection continue** avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Comme f est injective et $I \subset \mathbb{R}$, il suit du **théorème des valeurs intermédiaires** que f est **strictement monotone**. On parvient alors à montrer sans trop de difficultés que f^{-1} est aussi continue. Donc **f est un homéomorphisme**.
- **Cela n'est plus valable en général**. Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : & [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \\ & \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$$

En munissant $\mathbb{S}^1$ de la distance induite par le module sur $\mathbb{C}$, **f est continue**. Elle est aussi **bijjective**. Mais **f^{-1} n'est pas continue !** Le problème ne peut être qu'en 2π et 0 : en effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2\pi - \frac{1}{n}) = e^{2i\pi} = e^0 = f(0)$, et donc, en posant $y_n := f(2\pi - \frac{1}{n})$ pour $n \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1).$$

Donc **f^{-1} n'est pas continue**.

Exercise

En utilisant l'exponentielle, montrez que $]0, 1[$ est homéomorphe à $]0, +\infty[$. Dédusiez des divers résultats de cette section que **les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont tous homéomorphes**.

V.1.Définition

Definition

[Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini.

V.1.Définition

Definition

[Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

V.1.Définition

Definition

[Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour la distance induite.

V.1.Définition

Definition

[Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour la distance induite. En d'autres termes, un ensemble $K \subset X$ est compact si pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Preuve : en exercice.

V.1.Définition

Definition

[Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour la distance induite. En d'autres termes, un ensemble $K \subset X$ est compact si pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Preuve : en exercice.

Remarques :

- On verra que cette définition fait sens dans le cadre de la [topologie générale](#).

V.1.Définition

Definition

[Ensemble compact] Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour la distance induite. En d'autres termes, un ensemble $K \subset X$ est compact si pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Preuve : en exercice.

Remarques :

- On verra que cette définition fait sens dans le cadre de la [topologie générale](#).
- Vous verrez des définitions dans lesquelles on demande **en plus** qu'un compact soit **non-vide**. Ici, on a fait le choix de ne pas l'exiger, mais dans la suite, on [insistera \(lourdement\)](#) sur la nécessité de prendre des ensembles non-vides si nécessaire.

V.2. Caractérisation par les suites

Theorem

Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- *(X, d) est compact ;*
- *De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .*

V.2. Caractérisation par les suites

Theorem

Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- *(X, d) est compact ;*
- *De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .*

On renvoie au cours de Licence pour la preuve de ce résultat classique.

V.2. Caractérisation par les suites

Theorem

Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- *(X, d) est compact ;*
- *De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .*

On renvoie au cours de Licence pour la preuve de ce résultat classique.

Remarque : On verra plus tard que cette caractérisation n'est valable **que pour les espaces métriques**.

V.2. Caractérisation par les suites

Theorem

Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- *(X, d) est compact ;*
- *De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .*

On renvoie au cours de Licence pour la preuve de ce résultat classique.

Remarque : On verra plus tard que cette caractérisation n'est valable **que pour les espaces métriques**.

Quelques exemples :

- Il suit du **théorème de Bolzano-Weierstraß** (toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge) que les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les **fermés-bornés**.

V.2. Caractérisation par les suites

Theorem

Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- (X, d) est compact ;
- De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .

On renvoie au cours de Licence pour la preuve de ce résultat classique.

Remarque : On verra plus tard que cette caractérisation n'est valable **que pour les espaces métriques**.

Quelques exemples :

- Il suit du **théorème de Bolzano-Weierstraß** (toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge) que les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les **fermés-bornés**.
- Plus généralement, **dans un evn de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés-bornés** pour la distance associée à la structure d'evn. C'est une conséquence du **théorème de Bolzano-Weierstraß** et de **l'équivalence des normes en dimension finie**.

V.2. Caractérisation par les suites

Theorem

Soit (X, d) un espace métrique. On a l'équivalence suivante :

- (X, d) est compact ;
- De toute suite à valeurs dans X , on peut extraire une sous-suite convergente dans X .

On renvoie au cours de Licence pour la preuve de ce résultat classique.

Remarque : On verra plus tard que cette caractérisation n'est valable **que pour les espaces métriques**.

Quelques exemples :

- Il suit du **théorème de Bolzano-Weierstraß** (toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge) que les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les **fermés-bornés**.
- Plus généralement, **dans un evn de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés-bornés** pour la distance associée à la structure d'evn. C'est une conséquence du **théorème de Bolzano-Weierstraß** et de **l'équivalence des normes en dimension finie**.
- Si on munit $\mathbb{R}$ de la distance $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, alors, pour d , $\mathbb{R}$ est fermé-borné. Mais il n'est **pas compact** car, par exemple, la suite $(n)_n$ n'admet pas de sous-suite convergente.

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact.

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .

Preuve : On va utiliser 2 méthodes.

- Définition par le **recouvrement ouvert**. [Tableau]

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .

Preuve : On va utiliser 2 méthodes.

- Définition par le **recouvrement ouvert**. [Tableau]
- Preuve par les **suites**. [Tableau]

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .

Preuve : On va utiliser 2 méthodes.

- Définition par le **recouvrement ouvert**. [Tableau]
- Preuve par les **suites**. [Tableau]

Corollary

*Soit (X, d) un espace métrique compact non-vidé. Alors toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est **bornée** et atteint son **infimum et son supremum**.*

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .

Preuve : On va utiliser 2 méthodes.

- Définition par le [recouvrement ouvert](#). [Tableau]
- Preuve par les [suites](#). [Tableau]

Corollary

Soit (X, d) un espace métrique compact non-vidé. Alors toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est [bornée](#) et atteint son [infimum](#) et son [supremum](#).

Preuve : D'après la proposition précédente, $f(X)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension finie, $f(X)$ est fermé-borné de $\mathbb{R}$, donc (cours de Licence), il admet un minimum et un maximum. □

V.3. Image continue d'un compact

Proposition

L'image continue d'un compact est un compact. En d'autres termes, pour (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques avec $f : X \rightarrow Y$ continue, si $K \subset X$ est compact, alors $f(K)$ est compact dans Y .

Preuve : On va utiliser 2 méthodes.

- Définition par le **recouvrement ouvert**. [Tableau]
- Preuve par les **suites**. [Tableau]

Corollary

*Soit (X, d) un espace métrique compact non-vide. Alors toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est **bornée** et atteint son **infimum** et son **supremum**.*

Preuve : D'après la proposition précédente, $f(X)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension finie, $f(X)$ est fermé-borné de $\mathbb{R}$, donc (cours de Licence), il admet un minimum et un maximum. □

Proposition

Pour (X, d_X) compact non vide et (Y, d_Y) espace métrique, on considère $C(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y . Pour $f, g \in C(X, Y)$, on définit

$$d(f, g) := \sup_{x, y \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

*Alors $d(f, g) < +\infty$ pour tout $f, g \in C(X, Y)$ et d est une **distance** sur $C(X, Y)$*

V.4. Bijection continue sur un compact

Proposition

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction avec (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que

- f est *continue* ;

V.4. Bijection continue sur un compact

Proposition

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction avec (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que

- f est *continue* ;
- f est *bijjective* ;

V.4. Bijection continue sur un compact

Proposition

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction avec (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que

- f est *continue* ;
- f est *bijjective* ;
- (X, d_X) est *compact*.

V.4. Bijection continue sur un compact

Proposition

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction avec (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que

- f est *continue*;
- f est *bijjective*;
- (X, d_X) est *compact*.

Alors f est un *homéomorphisme*, c'est-à-dire f, f^{-1} sont continues.

La preuve est en devoir ou en exercice.

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$.

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité".

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Définition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi).

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi). On peut quand même se débrouiller avec des espaces vectoriels topologiques.

V.5.2. Exemples et contre-exemples

- La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi). On peut quand même se débrouiller avec des espaces vectoriels topologiques.

V.5.2. Exemples et contre-exemples

- La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue sur $[0, 1]$** .

Preuve : Soient $x, y \in [0, 1]$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \leq 2|x-y|.$$

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi). On peut quand même se débrouiller avec des espaces vectoriels topologiques.

V.5.2. Exemples et contre-exemples

- La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue sur $[0, 1]$** .

Preuve : Soient $x, y \in [0, 1]$, on a

$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq 2|x - y|$. On se donne $\epsilon > 0$. Alors si $|x - y| < \alpha := \epsilon/2$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue (α ne dépend que de ϵ).

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi). On peut quand même se débrouiller avec des espaces vectoriels topologiques.

V.5.2. Exemples et contre-exemples

- La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue sur $[0, 1]$** .

Preuve : Soient $x, y \in [0, 1]$, on a

$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq 2|x - y|$. On se donne $\epsilon > 0$. Alors si $|x - y| < \alpha := \epsilon/2$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue (α ne dépend que de ϵ).

- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **n'est pas uniformément continue**.

V.5. Uniforme continuité

V.5.1 Définition

Definition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in X, \{d_X(x, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\}$$

Important ! Ici $\alpha = \alpha(\epsilon)$ est indépendant du choix de $x \in X$. C'est en cela qu'on a uniformité. On dit parfois que "le module de continuité est indépendant du point de continuité". C'est la différence avec la définition de la continuité en un point (Définition 18) dans laquelle α dépend du point de continuité choisi.

Contrairement à la plupart des notions précédentes, il est nécessaire de travailler sur des espaces métriques pour parler d'uniforme continuité (voyez pourquoi). On peut quand même se débrouiller avec des espaces vectoriels topologiques.

V.5.2. Exemples et contre-exemples

- La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue sur $[0, 1]$** .

Preuve : Soient $x, y \in [0, 1]$, on a

$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \leq 2|x-y|$. On se donne $\epsilon > 0$. Alors si $|x-y| < \alpha := \epsilon/2$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue (α ne dépend que de ϵ).

- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **n'est pas uniformément continue**. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, on a $|f(n + \alpha/2) - f(n)| \geq \alpha n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Definition

Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on dit que f est α -Hölderienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)^\alpha$ pour tous $x, y \in X$.

Notons qu'une fonction est 1-Hölderienne ssi elle est Lipschitzienne.

Definition

Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on dit que f est α -Hölderienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)^\alpha$ pour tous $x, y \in X$.

Notons qu'une fonction est 1-Hölderienne ssi elle est Lipschitzienne.

Proposition

Toute fonction Lipschitzienne ou Hölderienne est uniformément continue.

La preuve est laissée en exercice.

Proposition

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, soit $U \subset E$ un ouvert **convexe** et soit $f : U \rightarrow F$ une fonction. On suppose que f est différentiable et que $df : U \rightarrow L_c(E, F)$ est bornée (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|df_x\|_{E \rightarrow F} \leq M$ pour tout $x \in U$). Alors f est **uniformément continue**.

Definition

Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on dit que f est α -Hölderienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)^\alpha$ pour tous $x, y \in X$.

Notons qu'une fonction est 1-Hölderienne ssi elle est Lipschitzienne.

Proposition

Toute fonction Lipschitzienne ou Hölderienne est uniformément continue.

La preuve est laissée en exercice.

Proposition

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, soit $U \subset E$ un ouvert **convexe** et soit $f : U \rightarrow F$ une fonction. On suppose que f est différentiable et que $df : U \rightarrow L_c(E, F)$ est bornée (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|df_x\|_{E \rightarrow F} \leq M$ pour tout $x \in U$). Alors f est **uniformément continue**.

Preuve : pour $x, y \in U$, il suffit d'appliquer l'**Inégalité des Accroissement Finis** à $\varphi : [0, 1] \rightarrow F$, $\varphi(t) := f(tx + (1-t)y)$ pour $t \in [0, 1]$. On a alors φ dérivable et $\|\varphi'(t)\|_F \leq M\|x - y\|_E$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Definition

Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on dit que f est α -Hölderienne si $\exists L > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)^\alpha$ pour tous $x, y \in X$.

Notons qu'une fonction est 1-Hölderienne ssi elle est Lipschitzienne.

Proposition

Toute fonction Lipschitzienne ou Hölderienne est uniformément continue.

La preuve est laissée en exercice.

Proposition

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, soit $U \subset E$ un ouvert **convexe** et soit $f : U \rightarrow F$ une fonction. On suppose que f est différentiable et que $df : U \rightarrow L_c(E, F)$ est bornée (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|df_x\|_{E \rightarrow F} \leq M$ pour tout $x \in U$). Alors f est **uniformément continue**.

Preuve : pour $x, y \in U$, il suffit d'appliquer l'**Inégalité des Accroissement Finis** à $\varphi : [0, 1] \rightarrow F$, $\varphi(t) := f(tx + (1-t)y)$ pour $t \in [0, 1]$. On a alors φ dérivable et $\|\varphi'(t)\|_F \leq M\|x - y\|_E$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Application : $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \ln x$ pour tout $x \geq 1$ est uniformément continue.

V.5.4. Théorème de Heine

Theorem

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espace métriques. On suppose que X est compact. Alors toute fonction continue sur X est uniformément continue.

La preuve se fait par contradiction : voir cours de Licence.

V.5.4. Théorème de Heine

Theorem

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espace métriques. On suppose que X est compact. Alors toute fonction continue sur X est uniformément continue.

La preuve se fait par contradiction : voir cours de Licence.

Exercise

Montrez que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

- I. Définition et premières notions associées
- II. Construction de nouvelles topologies
- III. Suites et fonctions
- IV. Espaces compacts

I. Définition et premières notions associées

Definition (Espace Topologique)

Soit X un ensemble. Une topology sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

I. Définition et premières notions associées

Definition (Espace Topologique)

Soit X un ensemble. Une topology sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts** de la topologie. Ainsi, se donner une topologie revient à se donner des ensembles ouverts. Un ensemble est **fermé** est le complémentaire d'un ouvert.

I. Définition et premières notions associées

Definition (Espace Topologique)

Soit X un ensemble. Une topology sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts** de la topologie. Ainsi, se donner une topologie revient à se donner des ensembles ouverts. Un ensemble est **fermé** est le complémentaire d'un ouvert.

I.1. Exemples

- ❶ Pour tout ensemble X , $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des **topologies** sur X . En particulier, tout ensemble admet au moins une topologie.

I. Définition et premières notions associées

Definition (Espace Topologique)

Soit X un ensemble. Une topology sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts** de la topologie. Ainsi, se donner une topologie revient à se donner des ensembles ouverts. Un ensemble est **fermé** est le complémentaire d'un ouvert.

I.1. Exemples

- 1 Pour tout ensemble X , $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des **topologies** sur X . En particulier, tout ensemble admet au moins une topologie.
- 2 Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des unions d'intervalles ouverts forme une topologie.

I. Définition et premières notions associées

Definition (Espace Topologique)

Soit X un ensemble. Une topologie sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts** de la topologie. Ainsi, se donner une topologie revient à se donner des ensembles ouverts. Un ensemble est **fermé** est le complémentaire d'un ouvert.

I.1. Exemples

- 1 Pour tout ensemble X , $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des **topologies** sur X . En particulier, tout ensemble admet au moins une topologie.
- 2 Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des unions d'intervalles ouverts forme une topologie.

Definition (Voisinage)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $x \in X$. Un **voisinage** de x est un ensemble $A \subset X$ tel qu'il existe U un ouvert tel que $x \in U \subset A$.

I. Définition et premières notions associées

Definition (Espace Topologique)

Soit X un ensemble. Une topologie sur X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{i \in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts** de la topologie. Ainsi, se donner une topologie revient à se donner des ensembles ouverts. Un ensemble est **fermé** est le complémentaire d'un ouvert.

I.1. Exemples

- 1 Pour tout ensemble X , $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des **topologies** sur X . En particulier, tout ensemble admet au moins une topologie.
- 2 Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des unions d'intervalles ouverts forme une topologie.

Definition (Voisinage)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $x \in X$. Un **voisinage** de x est un ensemble $A \subset X$ tel qu'il existe U un ouvert tel que $x \in U \subset A$.

Definition (Séparation)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que la topologie est **séparée** si pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe U, V ouverts tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exemples : sur un ensemble X , la topologie $\{\emptyset, X\}$ n'est pas séparée si $\text{Card}(X) > 1$; mais la topologie $\mathcal{P}(X)$ est séparée.

I.2. Topologie associée à un espace métrique

I.2.1. La définition

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble des ouverts de la Définition 5 constitue une topologie sur X . C'est la **topologie associée à la métrique d** , ou encore "topologie d'espace métrique" associée à d .

I.2. Topologie associée à un espace métrique

I.2.1. La définition

Proposition

*Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble des ouverts de la Définition 5 constitue une topologie sur X . C'est la **topologie associée à la métrique d** , ou encore "topologie d'espace métrique" associée à d .*

Preuve : c'est une conséquence directe de la Proposition 8 et de la définition d'une topologie.

I.2. Topologie associée à un espace métrique

I.2.1. La définition

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble des ouverts de la Définition 5 constitue une topologie sur X . C'est la **topologie associée à la métrique d** , ou encore "topologie d'espace métrique" associée à d .

Preuve : c'est une conséquence directe de la Proposition 8 et de la définition d'une topologie.

I.2.2. Conséquences immédiates

- Les notions d'ouverts, de fermés et de voisinages **coïncident** : ouf !
- La topologie d'espace métrique est **séparée**.

II. Construction de nouvelles topologies

II.1. Topologie induite

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique. Soit $Z \subset X$. On dit que *A est un ouvert de Z si $A = U \cap Z$ avec U ouvert de X*. Ceci définit une topologie, dite topologie induite par $\mathcal{T}_X$ sur Z .

C'est une conséquence de la Proposition 11.

II. Construction de nouvelles topologies

II.1. Topologie induite

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique. Soit $Z \subset X$. On dit que **A est un ouvert de Z si $A = U \cap Z$ avec U ouvert de X** . Ceci définit une topologie, dite topologie induite par $\mathcal{T}_X$ sur Z .

C'est une conséquence de la Proposition 11.

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Z \subset X$. La topologie sur Z induite par la topologie d'espace métrique (X, d) **coïncide** avec la topologie sur Z associée à la métrique induite $d|_{Z \times Z}$.

Encore une conséquence de la Proposition 11.

II.2. Topologie produit

Proposition (Topologie Produit)

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On dit qu'un ensemble $\Omega \subset X \times Y$ est un ouvert de la topologie produit si

- *Soit $\Omega = \emptyset$,*
- *Soit pour tout $(x, y) \in \Omega$, il existe $U \subset X$ et $V \subset Y$ ouverts tels que*

$$(x, y) \in U \times V \subset \Omega.$$

Ceci constitue bien une topologie.

La preuve fait l'objet d'un exercice .

II.2. Topologie produit

Proposition (Topologie Produit)

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On dit qu'un ensemble $\Omega \subset X \times Y$ est un ouvert de la topologie produit si

- Soit $\Omega = \emptyset$,
- Soit pour tout $(x, y) \in \Omega$, il existe $U \subset X$ et $V \subset Y$ ouverts tels que

$$(x, y) \in U \times V \subset \Omega.$$

Ceci constitue bien une topologie.

La preuve fait l'objet d'un exercice .

Proposition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. La topologie associée à la métrique produit **coïncide** avec la topologie produit des deux topologies de X et Y induites par les distances d_X et d_Y .

Là encore, la preuve fera l'objet d'un exercice.

III. Suites et fonctions

III.1. Convergence des suites

Definition

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique. Soit une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in X$. On dit que (x_n) converge vers x (et que x est une limite de (x_n)) lorsque $n \rightarrow \infty$ si

$\forall U$ ouvert tel que $x \in U, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U\}$.

III. Suites et fonctions

III.1. Convergence des suites

Definition

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique. Soit une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in X$. On dit que (x_n) converge vers x (et que x est une limite de (x_n)) lorsque $n \rightarrow \infty$ si

$\forall U$ ouvert tel que $x \in U$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U\}$.

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique séparé. Si $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$, alors la limite est **unique**. On note alors $x = \lim_n x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Preuve classique : cours de Licence ou exercice.

III.2. Continuité

Definition

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est continue si

$\forall V$ ouvert de Y , alors $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Il est sous-entendu qu'on prend les topologies $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$.

Proposition

La notion de continuité dans des espaces métriques **coïncide** avec celle dans les espaces munis des topologies induites par les métriques.

Ce résultat fait l'objet d'un exercice.

III.2. Continuité

Definition

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est continue si

$$\forall V \text{ ouvert de } Y, \text{ alors } f^{-1}(V) \text{ est ouvert dans } X.$$

Il est sous-entendu qu'on prend les topologies $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$.

Proposition

La notion de continuité dans des espaces métriques *coïncide* avec celle dans les espaces munis des topologies induites par les métriques.

Ce résultat fait l'objet d'un exercice.

III.3. Caractérisation de la continuité par les suites Dans le cas d'espace métriques, on a vu qu'on peut caractériser la continuité par les suites (Proposition 19). *La preuve ne fonctionne pas dans le cas général d'un espace topologique quelconque.* Le point essentiel est que, dans le cas d'un espace métrique (X, d) , en tout point $x \in X$, il existe une famille dénombrable $(U_n)_n$ de voisinages de x telle que tout ouvert de X qui contient x contient un des U_n : des espaces qui vérifient cette propriété sont dits à base dénombrable d'ouverts. On peut alors montrer que pour de tels espaces, la caractérisation séquentielle (c'est-à-dire par les suites) a lieu.

IV. Espaces compacts

IV.1. Définitions Comme remarqué plus haut, la Définition 22 fait sens pour des espaces topologiques quelconques :

Definition

[Ensemble compact, voir Définition 23] Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

IV. Espaces compacts

IV.1. Définitions Comme remarqué plus haut, la Définition 22 fait sens pour des espaces topologiques quelconques :

Definition

[Ensemble compact, voir Définition 23] Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble de X est compact s'il est compact pour topologie induite. En d'autres termes, un ensemble $K \subset X$ est compact si pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que $O_i \subset X$ est ouvert pour tout $i \in I$, alors

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tel que } K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Quelques remarques qui seront utiles dans la suite de ce cours :

- Si une topologie n'a qu'un **nombre fini d'ouverts** (c'est le cas de la topologie triviale $\{\emptyset, X\}$), alors **toute partie de X est compacte**!!!!

Quelques remarques qui seront utiles dans la suite de ce cours :

- Si une topologie n'a qu'un **nombre fini d'ouverts** (c'est le cas de la topologie triviale $\{\emptyset, X\}$), alors **toute partie de X est compacte**!!!!
- Munissons X de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. On suppose que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Alors tout compact pour $\mathcal{T}_2$ est compact pour $\mathcal{T}_1$ (preuve immédiate) : la topologie $\mathcal{T}_1$ contient plus de compacts que $\mathcal{T}_2$. Ainsi **plus une topologie est petite, plus elle a de compacts**.

Quelques remarques qui seront utiles dans la suite de ce cours :

- Si une topologie n'a qu'un **nombre fini d'ouverts** (c'est le cas de la topologie triviale $\{\emptyset, X\}$), alors **toute partie de X est compacte**!!!!
- Munissons X de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. On suppose que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Alors tout compact pour $\mathcal{T}_2$ est compact pour $\mathcal{T}_1$ (preuve immédiate) : la topologie $\mathcal{T}_1$ contient plus de compacts que $\mathcal{T}_2$. Ainsi **plus une topologie est petite, plus elle a de compacts**.

Il est parfois un peu déstabilisant de travailler sur des compacts généraux.

Quelques remarques qui seront utiles dans la suite de ce cours :

- Si une topologie n'a qu'un **nombre fini d'ouverts** (c'est le cas de la topologie triviale $\{\emptyset, X\}$), alors **toute partie de X est compacte**!!!!
- Munissons X de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. On suppose que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Alors tout compact pour $\mathcal{T}_2$ est compact pour $\mathcal{T}_1$ (preuve immédiate) : la topologie $\mathcal{T}_1$ contient plus de compacts que $\mathcal{T}_2$. Ainsi **plus une topologie est petite, plus elle a de compacts**.

Il est parfois un peu déstabilisant de travailler sur des compacts généraux. Par exemple le résultat suivant est assez délicat à prouver :

Proposition

*Dans un espace topologique **séparé**, tout compact est fermé.*

La preuve fait l'objet d'un exercice de TD.

Quelques remarques qui seront utiles dans la suite de ce cours :

- Si une topologie n'a qu'un **nombre fini d'ouverts** (c'est le cas de la topologie triviale $\{\emptyset, X\}$), alors **toute partie de X est compacte**!!!!
- Munissons X de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. On suppose que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Alors tout compact pour $\mathcal{T}_2$ est compact pour $\mathcal{T}_1$ (preuve immédiate) : la topologie $\mathcal{T}_1$ contient plus de compacts que $\mathcal{T}_2$. Ainsi **plus une topologie est petite, plus elle a de compacts**.

Il est parfois un peu déstabilisant de travailler sur des compacts généraux. Par exemple le résultat suivant est assez délicat à prouver :

Proposition

*Dans un espace topologique **séparé**, tout compact est fermé.*

La preuve fait l'objet d'un exercice de TD.

IV.2. Cas des espaces métriques Dans la plupart des cas, on sera dans le cadre métrique pour lequel on a la caractérisation par les suites du Théorème 24. On ne revient pas dessus, elle est ultra-classique.

IV.3. Image continue d'un compact

Ce qui a été vu dans le cadre des espaces métriques reste vrai ici. En particulier :

- L'image continue d'un compact est compacte ;
- Une fonction continue à valeurs réelles est bornée sur tout compact non vide, et elle atteint ses bornes.
- Si $(X, \mathcal{T}_X)$ est un espace topologique compact et (Y, d_Y) est un espace métrique, alors pour $f, g \in C^0(X, Y)$, on définit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Le fonction d est alors une **distance** sur $C^0(X, Y)$.

Vous savez qu'un des intérêts des espaces compacts en Analyse est de pouvoir **minimiser des fonctionnelles**. Donc **plus on a de compacts, plus on pourra minimiser**. Et donc, avec ce qu'on a vu plus haut, plus la topologie sera petite, plus on aura de compacts, plus on va pouvoir minimiser. Le petit souci sera qu'il faudra étudier la **continuité dans plusieurs topologies**.

- I. Complétude (panorama rapide)
- II. Énoncé et preuve du théorème du point fixe
- Applications

I. Complétude (panorama rapide)

I.1. Definition

Definition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ such that for all } p, q \in \mathbb{N}, \{p, q \geq n_\epsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon\}.$$

On dit qu'un espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy dans X admet une limite dans X . Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée.

I. Complétude (panorama rapide)

I.1. Definition

Definition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N} \text{ such that for all } p, q \in \mathbb{N}, \{p, q \geq n_{\epsilon} \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon\}.$$

On dit qu'un espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy dans X admet une limite dans X . Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée.

I.2. Exemples :

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet pour l'unique topologie d'evn.

I. Complétude (panorama rapide)

I.1. Definition

Definition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ such that for all } p, q \in \mathbb{N}, \{p, q \geq n_\epsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon\}.$$

On dit qu'un espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy dans X admet une limite dans X . Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée.

I.2. Exemples :

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet pour l'unique topologie d'evn.
- Soit X un espace topologique et soit (Y, d_Y) un espace métrique. On suppose que X est compact et que (Y, d_Y) est complet. Alors $C^0(X, Y)$ est complet pour la distance

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \text{ pour } f, g \in C^0(X, Y).$$

- Soit X un espace topologique et soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $C^0(X, F)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F \text{ pour } f \in C^0(X, F).$$

- Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $C^k([0, 1], F)$ est un **espace de Banach** muni de la norme

$$\|f\|_{C^k([0,1],F)} := \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{\infty} \text{ pour } f \in C^k([0, 1], F).$$

- Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $C^k([0, 1], F)$ est un **espace de Banach** muni de la norme

$$\|f\|_{C^k([0,1], F)} := \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{\infty} \text{ pour } f \in C^k([0, 1], F).$$

- Les espaces $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

- Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $C^k([0, 1], F)$ est un **espace de Banach** muni de la norme

$$\|f\|_{C^k([0,1], F)} := \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{\infty} \text{ pour } f \in C^k([0, 1], F).$$

- Les espaces $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.3. Propriétés

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $F \subset X$. Alors F est **complet** (pour la distance induite) si et seulement si F est **fermé** dans X .

1.4. Théorème des fermés emboîtés

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

- $F_n \subset X$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $F_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Alors il existe $x \in X$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Démonstration.

[Tableau]

I.5. Pourquoi les espaces complets sont-ils si utiles ? ? Dans le cadre de ce cours, on cherche à développer des outils assez généraux pour résoudre des problèmes d'analyse. "Résoudre" signifie souvent "prouver l'existence d'une solution". Grâce à la complétude, on parviendra à prouver l'existence de "quelque chose" qui, on l'espère, sera une solution de notre problème. Cependant, en général, nous n'aurons aucune idée de la forme de cette solution : pour cela, voyez un cours d'Analyse Numérique.

I.5. Pourquoi les espaces complets sont-ils si utiles ? ? Dans le cadre de ce cours, on cherche à développer des outils assez généraux pour résoudre des problèmes d'analyse. "Résoudre" signifie souvent "prouver l'existence d'une solution". Grâce à la complétude, on parviendra à prouver l'existence de "quelque chose" qui, on l'espère, sera une solution de notre problème. Cependant, en général, nous n'aurons aucune idée de la forme de cette solution : pour cela, voyez un cours d'Analyse Numérique. Il faut garder le slogan suivant en tête :

"Lorsqu'on soit résoudre un problème d'Analyse, il faut toujours commencer par utiliser des théorèmes utilisant la complétude."

I.5. Pourquoi les espaces complets sont-ils si utiles ?? Dans le cadre de ce cours, on cherche à développer des outils assez généraux pour résoudre des problèmes d'analyse. "Résoudre" signifie souvent "prouver l'existence d'une solution". Grâce à la complétude, on parviendra à prouver l'existence de "quelque chose" qui, on l'espère, sera une solution de notre problème. Cependant, en général, nous n'aurons aucune idée de la forme de cette solution : pour cela, voyez un cours d'Analyse Numérique. Il faut garder le slogan suivant en tête :

"Lorsqu'on soit résoudre un problème d'Analyse, il faut toujours commencer par utiliser des théorèmes utilisant la complétude."

Par exemple, pensez à l'énoncé (hyper-classique) suivant : "toute suite réelle croissante bornée est convergente dans $\mathbb{R}$ ". On a alors une limite (pensez à la constante d'Euler), mais on ne sait pas grand'chose de sa valeur.

I.5. Pourquoi les espaces complets sont-ils si utiles ?? Dans le cadre de ce cours, on cherche à développer des outils assez généraux pour résoudre des problèmes d'analyse. "Résoudre" signifie souvent "prouver l'existence d'une solution". Grâce à la complétude, on parviendra à prouver l'existence de "quelque chose" qui, on l'espère, sera une solution de notre problème. Cependant, en général, nous n'aurons aucune idée de la forme de cette solution : pour cela, voyez un cours d'Analyse Numérique. Il faut garder le slogan suivant en tête :

"Lorsqu'on soit résoudre un problème d'Analyse, il faut toujours commencer par utiliser des théorèmes utilisant la complétude."

Par exemple, pensez à l'énoncé (hyper-classique) suivant : "toute suite réelle croissante bornée est convergente dans $\mathbb{R}$ ". On a alors une limite (pensez à la constante d'Euler), mais on ne sait pas grand'chose de sa valeur. Pour prouver cet énoncé, on peut montrer que

- la suite est de Cauchy,

I.5. Pourquoi les espaces complets sont-ils si utiles ?? Dans le cadre de ce cours, on cherche à développer des outils assez généraux pour résoudre des problèmes d'analyse. "Résoudre" signifie souvent "prouver l'existence d'une solution". Grâce à la complétude, on parviendra à prouver l'existence de "quelque chose" qui, on l'espère, sera une solution de notre problème. Cependant, en général, nous n'aurons aucune idée de la forme de cette solution : pour cela, voyez un cours d'Analyse Numérique. Il faut garder le slogan suivant en tête :

"Lorsqu'on soit résoudre un problème d'Analyse, il faut toujours commencer par utiliser des théorèmes utilisant la complétude."

Par exemple, pensez à l'énoncé (hyper-classique) suivant : "toute suite réelle croissante bornée est convergente dans $\mathbb{R}$ ". On a alors une limite (pensez à la constante d'Euler), mais on ne sait pas grand'chose de sa valeur. Pour prouver cet énoncé, on peut montrer que

- la suite est de Cauchy,
- qu'elle converge en admettant que $\mathbb{R}$ est complet (après, cela dépend de la construction de $\mathbb{R}$ qu'on adopte).

II. Énoncé et preuve du théorème du point fixe

II.1. Définitions Soit $T : X \rightarrow X$ une fonction d'un ensemble X dans lui-même. Un point fixe de T est un point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

Soit (X, d) un espace métrique. Une application contractante sur X est une application $T : X \rightarrow X$ telle qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. En d'autres termes, T est k -Lipschitzienne avec $k < 1$.

II.2. Énoncé

Theorem (Théorème du point fixe de Picard)

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \rightarrow X$ une application contractante de rapport $k \in [0, 1)$. Alors T admet un unique point fixe $x \in X$. De plus, étant donné un point $z \in X$, on définit la suite $x_0 := z$ et $x_{n+1} = T(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_n$ converge vers x dans (X, d) et on a le contrôle

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

II.3. Optimalité des hypothèses Le théorème n'a plus lieu si :

- T n'envoie pas X sur lui-même. Exemple : $T : [0, 1] \rightarrow [1, \frac{3}{2}]$ avec $T(x) = 1 + \frac{x}{2}$ pour tout $x \in [0, 1]$
- X n'est pas complet. Exemple : $T : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ avec $T(x) = \frac{x}{2}$ pour tout $x \in (0, 1)$
- T n'est pas contractante. Exemple : $T : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ avec $T(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in [0, +\infty)$.

II.4. Preuve du Théorème 52

On se donne $T : X \rightarrow X$, k et $(x_n)_n$ comme dans l'énoncé du théorème.

Unicité. [Tableau]

Existence. *Etape 1 :* Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a
 $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1})$. Une récurrence immédiate
[Tableau] donne alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On fixe $p \geq 1$. Avec l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{l=0}^{p-1} d(x_{n+l+1}, x_{n+l}) \leq \sum_{l=0}^{p-1} k^{n+l} d(x_1, x_0) \\ &= k^n d(x_1, x_0) \sum_{l=0}^{p-1} k^l = k^n d(x_1, x_0) \frac{1 - k^p}{1 - k} \text{ since } k \neq 1 \\ &\leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0) \text{ car } 0 \leq k < 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Etape 2 : Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy. [Tableau]

Etape 3 : Montrons que x est un point fixe. [Tableau]

Ceci prouve le Théorème 52.

III. Applications

III.1. Quelques applications directes

- Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{1+x}$.
- Soient $k \in]0, 1[$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$ tels que $|h'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x - h(y), y - h(x)) \end{cases} .$$

Alors ϕ est un C^1 -difféomorphisme.

Exercice : Prouvez cet énoncé. Voici quelques indications :

- On fixe $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Montrez que prouver l'existence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(x, y) = (X, Y)$ est équivalent à trouver un point fixe d'une applications $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bien choisie.
- Avec une norme sur $\mathbb{R}^2$ bien choisie et l'Inégalité des Accroissements Finis, montrez que T est contractante.
- Utilisez le Théorème d'Inversion Globale pour conclure.

III.2. Panorama (sélectif) d'applications plus sophistiquées Le Théorème du point fixe de Picard est utilisé dans d'innombrables contextes :

- **Preuve du Théorème d'Inversion Locale** (voir Théorème ??). Pour y proche de $f(x_0)$ dans un espace ad-hoc, trouver x proche de x_0 tel que $y = f(x)$ revient à résoudre $x = T(x)$ avec $T(x) = x - f(x) + y$. En supposant que $df_{x_0} = Id$ (ce qui est toujours possible), T est contractante au voisinage de x_0 : ceci donne l'injectivité et la surjectivité locales.
- **Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Afin de résoudre $x'(t) = f(x(t))$ avec $x(0) = x_0$, on écrit $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$ pour tout t . Ainsi la fonction x est solution de $x = T(x)$ avec $T(x)(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$ pour tout t . La difficulté est de trouver un espace X bien adapté tel que $T : X \rightarrow X$ soit contractante. Voir l'exercice ci-dessous pour une preuve dans un cas particulier.
- **En Analyse Numérique**, réduire un problème général à un problème de point fixe est souvent une étape préliminaire. La vitesse de convergence est alors explicite, ce qui est un point positif. Malheureusement, ce n'est pas encore suffisant et les spécialistes doivent développer des méthodes plus performantes pour obtenir une meilleure vitesse de convergence.
- **En Sciences Economiques**, on se ramène souvent à des problèmes de points fixes pour des applications contractantes. Mais ceci étant très contraignant, les économistes sont souvent demandeurs de méthodes plus sophistiquées : avis à toutes et tous, il y a du travail dans ce secteur.

Exercice : Le Théorème de Cauchy-Lipschitz dans un cas particulier.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M \text{ and } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche à prouver l'existence de $\delta > 0$ et $x \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ tels que that

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \text{pour tout } t \in [-\delta, \delta] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

Soit $\delta > 0$ qui sera fixé plus tard.

- Soit $x \in C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ une fonction continue. Montrez qu'on a l'équivalence :

$$\{x \text{ est } C^1 \text{ et résoud (3)}\} \Leftrightarrow \left\{ x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \text{ pour tout } t \in [-\delta, \delta] \right\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} T : C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) &\rightarrow C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \right) \end{aligned}$$

- Montrez que T est bien définie et que pour $\delta > 0$ bien choisi, T est contractante en munissant $C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Montrez l'existence et l'unicité de la solution de (3).

III.3. Continuité par rapport aux paramètres

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $F : E \times X \rightarrow X$ une fonction continue pour la topologie produit. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que pour tout $\lambda \in E$, $T(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$ est k -Lipschitzienne. Pour tout $\lambda \in E$, il suit du Théorème de Picard qu'il existe un unique $x_\lambda \in X$ qui est un point fixe de $T(\lambda, \cdot)$. Alors l'application $\lambda \rightarrow x_\lambda$ de $E \rightarrow X$ est continue.

Exercice : Démontrez la Proposition 53. Avant de considérer le cas général, commencez par les cas suivants :

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique (E, d_E) et il existe $L > 0$ tel que

$$d(T(\lambda, x), T(\lambda', x')) \leq L d_E(\lambda, \lambda') + k d(x, x')$$

pour tous $\lambda, \lambda' \in E$ et $x, x' \in X$.

- $(E, \mathcal{T})$ est un espace métrique.
- Cas général.

Exercice : On prend les notations de l'exercice de résolution d'EDO. Montrez que l'application $(x_0, t) \mapsto x(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-\delta, \delta]$, quitte à réduire $\delta > 0$.