

Une preuve du théorème de Riesz

Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1 (dit de Riesz). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On a l'équivalence*

$$\{E \text{ est de dimension finie}\} \Leftrightarrow \{\bar{B}_E(0,1) = \{x \in E / \|x\| = 1\} \text{ est compacte}\}$$

Dans tout ce problème, on rappelle qu'en dimension finie, les compacts pour la topologie d'evn sont exactement les fermés bornés non vides.

1. On se donne $F \subset E$ un sous-ev de E de dimension finie tel que $F \neq E$. Soit $z \in E$. On va montrer qu'il existe $x_0 \in F$ tel que

$$\|z - x_0\| = \inf\{\|z - x\| / x \in F\}$$

- a. Soit $m := \inf\{\|z - x\| / x \in F\}$. Montrez que m est défini et que $m \geq 0$.
- b. Montrez qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z - x_n\| = m.$$

- c. Montrez qu'il existe $R > 0$ tel que $\|x_n\| \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- d. On munit F de la norme $\|\cdot\|_F$ définie par $\|x\|_F := \|x\|$ pour tout $x \in F$ (c'est la norme induite par $\|\cdot\|$). Montrez que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F .
- e. Montrez que $K := \{x \in F / \|x\|_F \leq R\}$ est un compact de F .
- f. Dédurre de c., e. et b. qu'il existe $x_0 \in F$ tel que $m = \|z - x_0\|$.
- g. On suppose que $z \notin F$. Montrez que $\|z - x_0\| > 0$.
- h. On pose $y := \frac{z - x_0}{\|z - x_0\|}$. Montrez que $\|y\| = 1$ et que $\inf\{\|y - x\| / x \in F\} = 1$.

2. On suppose que E n'est pas de dimension finie. En utilisant 1., montrez l'existence d'une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

- $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $\|x_p - x_q\| \geq 1$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$.

3. Dédurrez de 2. que si E n'est pas de dimension finie, alors $\bar{B}_E(0,1)$ n'est pas compacte.

4. Démontrez le Théorème.