

CONSTRUCTION DE $\mathbb{R}$ À PARTIR DE SUITES DE CAUCHY

On propose ici une construction de l'ensemble des réels par les suites de Cauchy. De cette construction on déduit la complétude de $\mathbb{R}$ et la propriété de la borne supérieure. Dans la dernière partie, on prouve l'existence du complété d'un espace métrique quelconque.

A connaître aussi : il existe une construction de $\mathbb{R}$ par la méthode des coupures. Elle consiste à s'intéresser à certains intervalles de $\mathbb{Q}$. Pour une telle construction, voir Rudin, "Principes d'analyse mathématique", chapitre 1, annexe.

1. NOTATIONS, PRÉ-REQUIS

On admet l'existence de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$. L'élément neutre pour "+" est 0, celui pour "×" est 1. Muni de la relation d'ordre $\leq$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné. On note $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$ anneau quelconque, on définit $n.x$ par récurrence : $0.x = 0$, et $(n+1).x = n.x + x$.

On rappelle que dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$, si $x, y \in E$, on dit que $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$.

Définition 1. Un anneau A ordonné est archimédien si pour tout $x, y \in A$ tels que $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n.x > y$.

On utilisera librement les propriétés suivantes :

- $\mathbb{Z}$ est intègre,
- $\mathbb{Z}$ est archimédien,
- Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, alors $x + y \in \mathbb{N}$ et $x \times y \in \mathbb{N}$,
- Pour $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$,
- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}$, alors $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \mathcal{R}_f$$

où $\mathcal{R}_f$ est la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par $(a, b) \mathcal{R}_f (c, d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$.

0. Pour $(x, y) \in \mathbb{Q}$ et $(x', y') \in \mathbb{Q}$, on définit

$$\overline{(x, y)} + \overline{(x', y')} := \overline{(xy' + x'y, yy')} \text{ et } \overline{(x, y)} \times \overline{(x', y')} := \overline{(xx', yy')}$$

1. Montrez que les lois $+$ et $\times$ sont bien définies sur $\mathbb{Q}$. Quels sont les éléments neutres de $\mathbb{Q}$ pour ces lois? On continuera à noter ces éléments 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication. Montrer que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.

Soit

$$\begin{aligned} i_0 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ z &\mapsto \overline{(z, 1)}. \end{aligned}$$

où pour $u \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\bar{u} \in \mathbb{Q}$ désigne la classe de u pour la relation $\mathcal{R}_f$.

2. Montrer que i_0 est un morphisme injectif d'anneaux.

On définit l'ensemble

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} / \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ un représentant de } x \text{ tel que } pq \geq 0\}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ par

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^+.$$

3. Montrer que cette relation d'ordre est bien définie et compatible avec celle de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que si $x, y \in \mathbb{Z}$, alors $x \leq y \Leftrightarrow i_0(x) \leq i_0(y)$. Montrer que, muni de cette relation d'ordre, $(\mathbb{Q}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est archimédien.

On définit la valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ comme suit : $|x| = \max\{x, -x\}$.

5. Montrer que pour $x \in \mathbb{Q}$, $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ sinon. Montrer que pour $x, y, z \in \mathbb{Q}$, on a

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x \times y| = |x| \times |y|.$$

Cette valeur absolue induit alors une distance sur $\mathbb{Q}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \text{ tels que } x \geq 0\}$, c'est l'application qui au couple $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ associe $d_{\mathbb{Q}}(x, y) = |x - y|$.

2. SUITES DE CAUCHY

Définition 2 (Suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$). Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ si

$$\forall r \in \mathbb{Q}, r > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, (n, m \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| \leq r).$$

On note $\mathcal{C} = \{(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ est de Cauchy dans } \mathbb{Q}\}$.

6. Montrer que $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre.

Définition 3 (Convergence dans $\mathbb{Q}$). Soient $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{Q}$. On dit que (u_n) converge vers l dans $\mathbb{Q}$ si

$$\forall r \in \mathbb{Q}, r > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq r).$$

On définit la relation d'équivalence suivante sur $\mathcal{C}$: soient $u, v \in \mathcal{C}$,

$$u \mathcal{R} v \text{ ssi } (u - v \text{ converge vers } 0).$$

On pose

$$\mathbb{R} = \mathcal{C} / \mathcal{R}.$$

Pour $u, v \in \mathcal{C}$, on définit $\bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v}$ et $\bar{u} \times \bar{v} = \overline{u \times v}$.

7. Montrer que ces définitions sont licites et que $\mathbb{R}$ est ainsi muni d'une structure de corps. On notera toujours 0 et 1 ses éléments neutres pour l'addition et le produit. Pour $q \in \mathbb{Q}$, on note $\bar{q}$ la classe d'équivalence de la suite constante égale à q . Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} i : \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ q & \mapsto & \bar{q} \end{array}$$

est un morphisme injectif de corps.

3. RELATION D'ORDRE SUR $\mathbb{R}$

Définition 4 (Ordre strict sur $\mathbb{R}$). Soient $u, v \in \mathcal{C}$. On dit que $\bar{u} < \bar{v}$ si

$$\exists r_0 \in \mathbb{Q}, r_0 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow v_n - u_n \geq r_0).$$

On dit que $\bar{u} > \bar{v}$ si $\bar{v} < \bar{u}$.

8. Montrer que cette définition ne dépend pas du représentant choisi.

On définit la relation d'ordre suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\bar{u} \leq \bar{v} \text{ ssi } (\bar{u} = \bar{v} \text{ ou } \bar{u} < \bar{v}).$$

9. Montrer que la relation précédente est bien une relation d'ordre et que $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné et que son ordre est compatible avec l'ordre sur $\mathbb{Q}$, modulo l'injection i .

10. Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien.

On peut donc définir une valeur absolue : soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max\{x, -x\}$.

11. Montrer que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. Montrer que $|\cdot|$ est compatible avec l'opération $|\cdot|$ définie au 4. sur $\mathbb{Q}$. Prouver que si $(u_n) \in \mathcal{C}$ alors $|\bar{u}| = \overline{|u|}$ (ici, $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$).

12. Montrer que si $x, y, z \in \mathbb{R}$ sont tels que $x \geq y$ et $z \geq 0$, alors $z \times x \geq z \times y$.

4. TOPOLOGIE SUR $\mathbb{R}$

On définit maintenant l'application

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto |x - y|. \end{aligned}$$

13. Montrer que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- i) $d_{\mathbb{R}}(x, y) = d_{\mathbb{R}}(y, x)$,
- ii) $d_{\mathbb{R}}(x, y) \geq 0$, avec égalité ssi $x = y$,
- iii) $d_{\mathbb{R}}(x, y) \leq d_{\mathbb{R}}(x, z) + d_{\mathbb{R}}(z, y)$.

Montrer que si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $d_{\mathbb{R}}(i(x), i(y)) = d_{\mathbb{Q}}(x, y)$.

On définit maintenant une notion de convergence dans $\mathbb{R}$.

Définition 5 (Convergence dans $\mathbb{R}$). Soient $(U_N) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (U_N) converge vers l dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, (N \geq N_0 \Rightarrow |U_N - l| \leq \varepsilon).$$

Définition 6 (Suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$). Soit $(U_N) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (U_N) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall N, M \in \mathbb{N}, (N, M \geq N_0 \Rightarrow |U_N - U_M| \leq \varepsilon).$$

Si $U, V \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les suites $U + V$, $U \times V$, λU par :

- $(U + V)_N = U_N + V_N \forall N \in \mathbb{N}$,
- $(U \times V)_N = U_N \times V_N \forall N \in \mathbb{N}$,
- $(\lambda U)_N = \lambda \times U_N \forall N \in \mathbb{N}$.

14. Montrer que muni de ces lois, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre et que l'ensemble des suites réelles convergentes est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

15. Soient $U, V \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si U est bornée (i.e il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $|U_N| \leq B$ pour tout $N \in \mathbb{N}$) et V converge vers 0, alors $U \times V$ converge vers 0.

16. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x > 0$, alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x > i(q) > 0$.

Ce dernier résultat nous permet donc de prendre indifféremment ε dans $\mathbb{R}$ ou $i(\mathbb{Q})$ dans les définitions de la convergence et de la notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

17. Montrer que $i(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } |x - i(q)| < \varepsilon.$$

5. COMPLÉTUDE DE $\mathbb{R}$

On cherche à montrer que $\mathbb{R}$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente. Soit $(U_N) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

18. Montrer qu'il existe $(u_N) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $(U_N - i(u_N)) \rightarrow 0$.

Indication : utilisez 17..

19. Montrer que $u = (u_N)$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

20. Montrer que (U_N) converge vers $\bar{u}$ dans $\mathbb{R}$.

6. PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE

21. Montrer que toute suite réelle croissante et majorée converge. Indication : en raisonnant par l'absurde, montrez qu'une telle suite est de Cauchy.

Définition 7 (Borne supérieure). Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A possède une borne supérieure s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

- $a \leq \alpha$ pour tout $a \in A$,
- Si $m \in \mathbb{R}$ vérifie que $a \leq m$ pour tout $a \in A$, alors $\alpha \leq m$.

22. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ non vide possède une borne supérieure, alors le réel α donné par la définition est unique. On l'appelle la borne supérieure de A et on le note $\text{Sup}A$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \emptyset$ et A est majoré, c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$. On veut montrer que A possède une borne supérieure.

On pose $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} / \exists a \in A \text{ tel que } x \leq a\}$.

23. Montrer que $A \subset \tilde{A}$ et que pour $m \in \mathbb{R}$,

$$m \text{ majore } A \Leftrightarrow m \text{ majore } \tilde{A}.$$

Soit $a_0 \in \tilde{A}$ et $b_0 = M + 1 \in \mathbb{R} - \tilde{A}$. On suppose les réels a_n, b_n construits tels que $a_n \in \tilde{A}$, $b_n \in \mathbb{R} - \tilde{A}$ et $a_n \leq b_n$. On pose $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $c_n \in \tilde{A}$, alors $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$, sinon $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$ (c'est la dichotomie).

24. Montrer que (a_n) converge vers un réel α .

25. Montrer que α majore A et que si $m \in \mathbb{R}$ majore A , alors $\alpha \leq m$. En déduire que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure : tout ensemble non vide majoré possède une borne supérieure.

7. NOTION DE COMPLÉTÉ

Soit X un ensemble et soit $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que d est une distance si elle satisfait les trois axiomes de **13.**. On dit alors que (X, d) est un espace métrique. On suppose ici connues la topologie associée à la distance et la notion de convergence.

Définition 8 (Espace complet). Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on dit que (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, (n, m \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, u_m) \leq \varepsilon).$$

On dit que (X, d) est un espace complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X .

Définition 9 (Complété de $\mathbb{Q}$). Soit (Y, δ) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow Y$. On dit que (Y, δ, φ) est un complété de $\mathbb{Q}$ si

- (Y, δ) est un espace métrique complet,
- φ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$\delta(\varphi(x), \varphi(y)) = |x - y|,$$

- Si (E, d_E) est un espace métrique complet et s'il existe $f : \mathbb{Q} \rightarrow (E, d_E)$ isométrie, alors il existe $g : (Y, \delta) \rightarrow (E, d_E)$ isométrie telle que $f = g \circ \varphi$.

Définition 10 (Complété d'un espace métrique). Soit (X, d) un espace métrique. Soit (Y, δ) un autre espace métrique et $\varphi : X \rightarrow Y$. On dit que (Y, δ, φ) est un complété de (X, d) si

- (Y, δ) est un espace métrique complet,
- φ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in X$,

$$\delta(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y),$$

- Si (E, d_E) est un espace métrique complet et s'il existe $f : (X, d) \rightarrow (E, d_E)$ isométrie, alors il existe $g : (Y, \delta) \rightarrow (E, d_E)$ isométrie telle que $f = g \circ \varphi$.

26. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si (Y, δ, φ) est un complété de (X, d) , alors $\varphi(X)$ est dense dans Y . En déduire que le complété d'un espace métrique est unique à isométrie bijective près.
27. Montrer que $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ est un complété de $\mathbb{Q}$, et qu'il est unique à isométrie bijective près.
28. Soit (X, d) un espace métrique. En vous inspirant de la construction de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$, montrez que (X, d) possède un complété (question longue!). Que dire si (X, d) est complet ?