

TD 2 : séries entières (révisions)

Exercice 1. —

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence $\sqrt{7}$.
2. Est-il possible de trouver des suites a_n et b_n avec $a_n = o(b_n)$, et telles que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ aient le même rayon de convergence?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et celui de $\sum (-1)^n a_n z^n$?

Exercice 2. — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$
2. $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$

Exercice 3. — Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

1. (a_n) tend vers une limite $l \in \mathbb{R}^*$.
2. (a_n) est périodique et non identiquement nulle.
3. (a_n) est le nombre de diviseurs de n .
4. (a_n) est la n -ème décimale de π .

Exercice 4. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 5. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$, avec $a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 6. — [Théorème des zéros isolés faible] Soit $S(z)$ une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tq S soit identiquement nulle sur $] -\alpha, \alpha[$. Montrer que S est identiquement nulle.

Exercice 7. — Soit $f(z)$ la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ dans son disque ouvert de convergence. Montrer que f est paire ssi $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = 0$.

Exercice 8. — [Théorème des zéros isolés] Soit f une fonction développable en série entière, non identiquement nulle, dont le rayon de convergence vaut $+\infty$. Démontrer que l'ensemble Z des zéros de f est un fermé constitué de points isolés.

Exercice 9. — Développer en série entière les fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + 2x^2)$.
2. $\frac{1}{a-x}$, avec $a \neq 0$.
3. $\ln(x+a)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
4. $\frac{e^x}{1-x}$