

TD 3 : formule et théorème de Cauchy

Exercice 1. — Paramétrer les chemins suivants :

1. Le segment reliant $1 + 2i$ à $3 - 4i$.
2. Le cercle de centre $2 + i$ de rayon 2, parcouru dans le sens direct en partant de i .
3. Le quart de cercle orienté positivement de centre $1 + i$ reliant i à 1.
4. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$ qui relie les points d'affixe $1 + i$ à $2 + 4i$.

Ensuite, calculer dans chaque cas l'intégrale $\int_{\gamma} z dz$.

Exercice 2. — Dessiner les chemins suivants :

$$\gamma_1 : \begin{cases} [1, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto e^{-it}; \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto 1 + i + 2e^{it}; \end{cases} \quad \gamma_3 : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto t + i \cosh(t); \end{cases}$$

Exercice 3. — [Variation sur Liouville] Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière à croissance polynomiale, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M|z|^k.$$

Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 4. — [Variation sur Liouville] Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière dont la partie réelle est bornée. Montrer que f est constante. On pourra par exemple chercher une formule intégrale pour a_n en fonction non pas de f , mais de sa partie réelle u . Ou alors, on pourra utiliser la fonction exponentielle.

Exercice 5. — Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière non constante. Montrer que son image $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. — Calculer $\int_{\gamma} ze^z dz$ pour n'importe quel chemin allant de 0 à i .

Exercice 7. — Calculer $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ pour les deux chemins γ_1 et γ_2 suivants :

1. Le segment allant de 0 à i suivi du segment allant de i à $1 + i$;
2. Le segment allant de 0 à 1 suivi du segment allant de 1 à $1 + i$;

Exercice 8. — Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ puis $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$ pour les deux chemins suivants :

1. Le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon 1 allant de 1 à -1 .
2. Le demi-cercle inférieur de centre 0 et de rayon 1 allant de 1 à -1 .