

TD 4 : théorème des résidus

Certaines intégrales sont parfois calculables en primitivant (même si en général c'est assez long) : on demande de ne pas le faire et de n'utiliser que le théorème des résidus.

Exercice 1. — Calculer les résidus aux pôles des fonctions méromorphes $\frac{e^z}{z^2(z-1)}$ et $\frac{e^z}{z(z-1)^2}$.

Exercice 2. — Calculer les résidus aux pôles de la fonction méromorphe $\frac{1+z+z^2}{z(z^2+1)^2}$.

Exercice 3. — Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Exercice 4. — Calculer directement les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{2+3x^2}$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x+x^2}$, sans faire de changement de variables pour se ramener à l'exercice 1.

Exercice 5. — Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Puis, calculer $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^6}$.

Exercice 6. — Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 7. — Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x(x+1)dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 8. — Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 9. — [Série de Fourier] Développer la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2-\cos(t)}$ en série de Fourier, en calculant les coefficients à l'aide de résidus.

Exercice 10. — [Intégrales de Wallis] Calculer les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$.

Exercice 11. — [Transformée de Fourier] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Calculer sa transformée de Fourier¹

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Exercice 12. — [Intégrale de Dirichlet / sinus cardinal] La fonction *sinus cardinal*, utilisée notamment en optique, est $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Elle se prolonge par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ mais l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente. Calculer cette intégrale en utilisant la fonction méromorphe $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ et en considérant les compacts du type $K(R, r) = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \geq 0, r \leq |z| \leq R\}$. (Note : les primitives du sinus cardinal ne peuvent pas être exprimées à l'aide des fonctions usuelles.)

1. La variable ω est la pulsation : il existe une définition analogue en fonction de la fréquence $\nu = \omega/2\pi$. D'autre part on rajoute souvent un facteur $1/\sqrt{2\pi}$ devant l'intégrale pour avoir de meilleures formules d'inversion. On doit alors redéfinir la convolution avec le même facteur devant l'intégrale.