

---

## Glissement simple

---

On considère le repère cartésien orthonormé  $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , et la **transformation** définie en tout point matériel par  $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$  :

$$\underline{x} = \begin{cases} x_1 = X_1 + k(t) X_2 & \text{avec } k(t) \geq 0 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

La transformation est fonction du temps, et elle est donnée en description lagrangienne. On peut facilement imaginer intuitivement la forme de la configuration déformée, qu'on va retrouver par la suite

### 1. Ecrire le tenseur **gradient de la transformation** sous forme **tensorielle** et **matricielle**

On va privilégier pour la suite les notations tensorielle et indicielle plutôt que la notation matricielle, pour s'exercer à manipuler ces deux écritures. Remarque de notation : indices  $i, j, k$  pour la configuration actuelle, indices  $A, B, C$  pour la configuration de référence.

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_A = x_{i,A} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_A \quad \text{ou} \quad F_{iA}(\underline{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = x_{i,A}$$

(tenseur mixte : « un pied » dans chaque configuration)

$$\begin{array}{|l} F_{11} = x_{1,1} = 1 \\ F_{21} = x_{2,1} = 0 \\ F_{31} = x_{3,1} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} F_{12} = x_{1,2} = k(t) \\ F_{22} = x_{2,2} = 1 \\ F_{32} = x_{3,2} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} F_{13} = x_{1,3} = 0 \\ F_{23} = x_{2,3} = 0 \\ F_{33} = x_{3,3} = 1 \end{array}$$

On notation tensorielle on peut donc écrire :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + k(t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Et en notation matricielle :

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention à l'écriture  $\underline{\underline{F}} \neq \underline{F}$

On remarque que  $\underline{\underline{F}}^T \neq \underline{\underline{F}}$  : le tenseur gradient de la transformation n'est pas symétrique dans le cas général.

2. On rappelle que le déterminant d'un tenseur d'ordre 2 peut se calculer  $\det \underline{\underline{A}} = \varepsilon_{ijk} A_i A_j A_k$  avec  $\varepsilon_{ijk}$  le symbole de permutation circulaire. Calculer la **variation de volume** lors de la transformation.

Le cours indique que la variation de volume s'écrit :

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$$

Calculons donc le déterminant de  $\underline{\underline{F}}$  d'après  $\det \underline{\underline{F}} = \varepsilon_{ijk} F_{1i} F_{2j} F_{3k}$  :

$$\begin{aligned} \det \underline{\underline{F}} &= \varepsilon_{ijk} F_{1i} F_{2j} F_{3k} \\ &= F_{11} F_{22} F_{33} + F_{12} F_{23} F_{31} + F_{13} F_{21} F_{32} - F_{11} F_{23} F_{32} - F_{12} F_{21} F_{33} - F_{13} F_{22} F_{31} \\ &= F_{11} F_{22} F_{33} + \cancel{F_{12} F_{23} F_{31}} + \cancel{F_{13} F_{21} F_{32}} - \cancel{F_{11} F_{23} F_{32}} - \cancel{F_{12} F_{21} F_{33}} - \cancel{F_{13} F_{22} F_{31}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut vérifier qu'on obtient bien le même résultat en calculant le déterminant de la matrice représentative de  $\underline{\underline{F}}$  :

$$\det [\underline{\underline{F}}] = \det \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

On vient donc de montrer que la transformation se faisait à volume constant, ce qui est évident si on considère l'allure de la transformation.

3. On considère deux vecteurs matériels  $\underline{V} = X_2 \underline{e}_2$  et  $\underline{W} = X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2$  avec  $X_1, X_2 > 0$ . Déterminer ces deux vecteurs **transportés** dans la configuration actuelle  $\underline{v}, \underline{w}$  en utilisant le calcul indicial, et les représenter graphiquement dans les deux configurations  $K_0$  et  $K_t$ .

Le cours nous donne la formule de transport d'un vecteur matériel  $d\underline{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{L}$  ou  $d\underline{l}_i = F_{iA}(\underline{X}, t) dL_A$ .

On déduit :

$$v_i = F_{iA} V_A \Rightarrow \begin{cases} v_1 = F_{11} V_1 + F_{12} V_2 + F_{13} V_3 = k(t) X_2 \\ v_2 = F_{21} V_1 + F_{22} V_2 + F_{23} V_3 = X_2 \\ v_3 = F_{31} V_1 + F_{32} V_2 + F_{33} V_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v} = k(t) X_2 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2$$

$$w_i = F_{iA} W_A \Rightarrow \begin{cases} w_1 = F_{11} W_1 + F_{12} W_2 + F_{13} W_3 = X_1 + k(t) X_2 \\ w_2 = F_{21} W_1 + F_{22} W_2 + F_{23} W_3 = X_2 \\ w_3 = F_{31} W_1 + F_{32} W_2 + F_{33} W_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{w} = (X_1 + k(t) X_2) \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2$$

Il n'y a aucun changement selon la direction  $\underline{e}_3$ . A noter l'intérêt de prendre deux vecteurs matériels quelconques pour visualiser la déformation comme représenté ci-dessous :

4. Calculer la **dilatation** d'un vecteur unitaire  $\underline{A} = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) / \sqrt{2}$ .

On rappelle la forme du tenseur gradient de la transformation calculé ci-dessus (notation matricielle dans le repère orthonormé) :

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce tenseur permet de transporter un vecteur de la configuration initiale à la configuration actuelle.

Si on veut calculer la dilatation du vecteur  $\underline{A} = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) / \sqrt{2}$ , on cherche à connaître la quantité :

$$\lambda = \frac{\|\underline{a}\|}{\|\underline{A}\|} = \frac{\|\underline{\underline{F}} \cdot \underline{A}\|}{\|\underline{A}\|}$$

Le vecteur  $\underline{A}$  étant unitaire on a  $\lambda = \|\underline{\underline{F}} \cdot \underline{A}\|$ .

$$[\underline{\underline{F}} \cdot \underline{A}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+k(t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le norme de ce vecteur s'écrit évidemment :

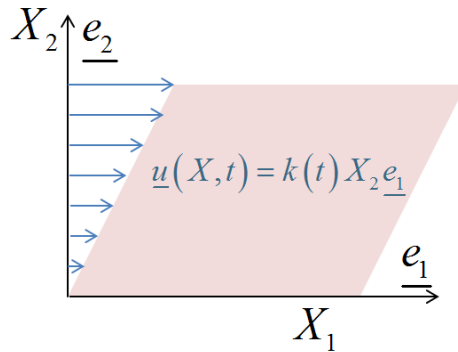
$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+k(t))\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dots = \sqrt{1+k(t) + \frac{k(t)^2}{2}}$$

On vérifie bien que la dilatation est égale à 1 à l'instant initial.

5. Exprimer et représenter le champ de **déplacements**.

Le champ de déplacements s'exprime simplement :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = k(t) X_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$



6. Calculer le **tenseur des déformations de Green-Lagrange**, puis le tenseur **linéarisé** en **HPP**. Discuter sur l'HPP.

Le cours nous indique que le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$

Il vient donc directement à partir de l'expression de  $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}(t) &= \frac{1}{2} \left( (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) k(t) + k(t)^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \right) \\ [\underline{\underline{E}}(t)] &= \frac{1}{2} k(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & k(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations linéarisées, ou infinitésimales, s'exprime d'après le cours :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T)$$

Ecrivons donc dans un premier temps  $\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}$  :

$$\begin{aligned}\underline{u} &= k(t) X_2 \underline{e}_1 \\ \underline{\underline{Grad}} \underline{u} &= u_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = k(t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \\ (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T &= k(t) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1\end{aligned}$$

On a au final :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} k(t) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \\ [\underline{\underline{\varepsilon}}] &= \frac{1}{2} k(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En comparant les déformations linéarisées aux déformations de Green-Lagrange, il apparaît clairement que dans ce cas l'HPP consiste à négliger  $k^2$  devant  $k$ . En écrivant le tenseur de Green-Lagrange sous une seconde forme :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}^T \cdot (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}))$$

il apparaît clairement que le terme  $k^2$  vient du terme  $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}^T \cdot (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})$  qu'on néglige en HPP devant  $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}$ .

7. Calculer les **déformations principales** à partir du tenseur des déformations linéarisées, que l'on notera  $\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II} \geq \varepsilon_{III}$ , et les **directions principales** correspondantes,  $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$ .

A partir du tenseur des déformations linéarisées on peut facilement déterminer les déformations principales :

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{\varepsilon}}] &= \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} &= -\alpha^3 + \alpha \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \alpha \left( \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \alpha^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Trois solutions :  $(k \geq 0) \quad \varepsilon_I = \frac{k}{2}; \varepsilon_{II} = 0; \varepsilon_{III} = -\frac{k}{2}$

Cela signifie qu'on a extension ( $\varepsilon_I \geq 0$ ) dans la direction  $\underline{e}_I$  et de la contraction ( $\varepsilon_{III} \leq 0$ ) dans la direction  $\underline{e}_{III}$ .

Pour calculer les directions principales, on doit résoudre :

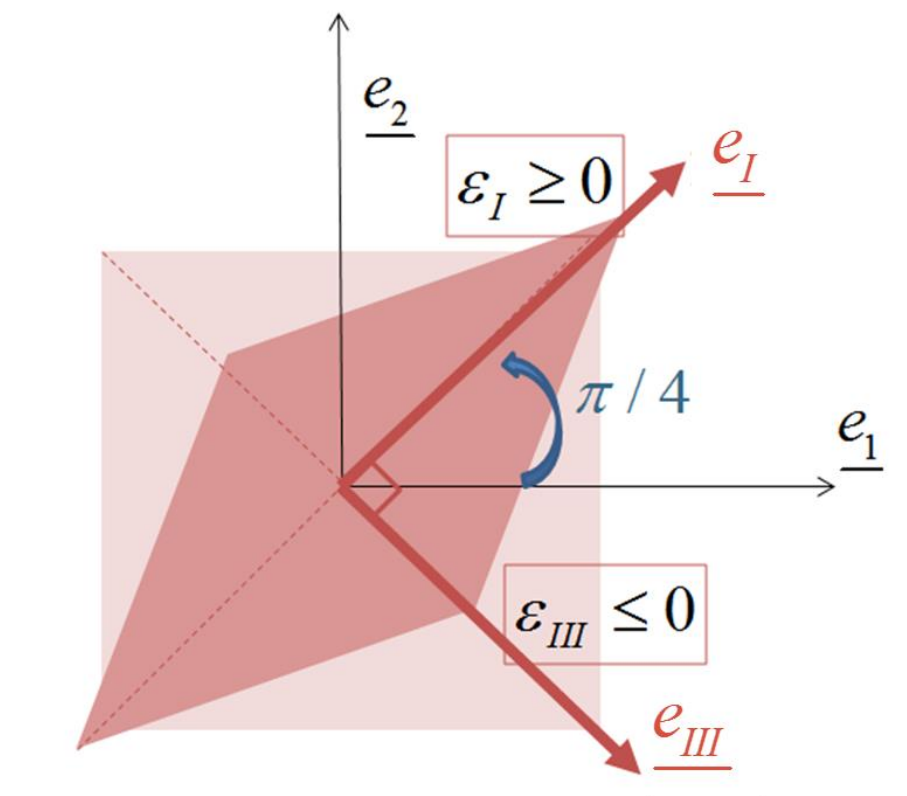
$$\begin{cases} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_i \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n}^i = \underline{0} \\ \underline{e}^i \cdot \underline{e}^i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\varepsilon_i & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -\varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_1^i e_1^i + e_2^i e_2^i + e_3^i e_3^i = 1$$

$$\varepsilon_I = \frac{k}{2} \Rightarrow \begin{cases} e_2^i - e_1^i = 0 \\ e_1^i e_1^i + e_2^i e_2^i + e_3^i e_3^i = 1 \\ e_3^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2^i = e_1^i \\ e_1^i e_1^i + e_2^i e_2^i = 1 \\ e_3^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e_I} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e_1} + \underline{e_2})$$

$$\varepsilon_{II} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_2^i = 0 \\ e_1^i = 0 \\ e_1^i e_1^i + e_2^i e_2^i + e_3^i e_3^i = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{e_{II}} = \underline{e_3}$$

$$\varepsilon_{III} = -\frac{k}{2} \Rightarrow \begin{cases} e_2^i + e_1^i = 0 \\ e_1^i e_1^i + e_2^i e_2^i + e_3^i e_3^i = 1 \\ e_3^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2^i = -e_1^i \\ e_1^i e_1^i + e_2^i e_2^i = 1 \\ e_3^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e_{III}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e_1} - \underline{e_2})$$

On choisit une représentation de telle sorte que  $\underline{e_I}, \underline{e_{II}}, \underline{e_{III}}$  soit direct :



On voit alors bien que dans le repère principal, l'état de déformation se réduit à un rétrécissement selon  $\underline{e_{III}}$  et à un allongement selon  $\underline{e_I}$ .