
Mouvement hélicoïdal

Enoncé

On considère un milieu continu dont chaque point matériel est animé d'une **vitesse** :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \begin{cases} v_1 = x_2 x_3 \\ v_2 = -x_1 x_3 \\ v_3 = kt + k_0 \end{cases} \text{ avec } k, k_0 \text{ des constantes.}$$

Montrer que ces **trajectoires** sont tracées sur un **cylindre** à base circulaire de rayon $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, puis exprimer ces trajectoires en coordonnées cylindriques.

Corrigé

A partir d'une description eulérienne, le cours nous dit que les trajectoires sont obtenues en résolvant l'équation différentielle :

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \quad \text{avec} \quad \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

On résout donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = v_1 = x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2 = -x_1 x_3 \end{array} \right\} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{x_2} \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{-x_1}{x_2} \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow x_2 dx_2 + x_1 dx_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (2x_2 dx_2 + 2x_1 dx_1) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = cste$$
$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 = kt + k_0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} kt^2 + k_0 t + cste$$

Appliquons maintenant la condition initiale $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$:

$$x_3(t=0) = X_3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} kt^2 + k_0 t + X_3$$

$$x_1^2(t=0) + x_2^2(t=0) = cste = X_1^2 + X_2^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2$$

Si on pose maintenant $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, on obtient les trajectoires :

$$x_3(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} kt^2 + k_0 t + X_3 \quad ; \quad x_1^2(\underline{X}, t) + x_2^2(\underline{X}, t) = R^2$$

Les points matériels circulent donc sur un cylindre de rayon $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et d'axe $\underline{e}_3$.

Tentons maintenant d'effectuer la même démarche en coordonnées cylindriques. On rappelle que dans ce système d'axe on a :

$$\begin{aligned}\underline{OM} &= \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \\ &= r \cos \theta \underline{e}_1 + r \sin \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{dx} &= dr \underline{e}_r + r d\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z \\ \underline{v}(r, \theta, z) &= v_r(r, \theta, z) \underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \underline{e}_z\end{aligned}$$

On cherche à nouveau à résoudre le système :

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \text{ avec } \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

$$\begin{cases} dr = v_r dt \\ r d\theta = v_\theta dt \\ dz = v_z dt \end{cases}$$

Si on reprend la solution précédente on peut écrire :

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= R^2 \Rightarrow (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow r = R \\ x_3 &= z \Rightarrow z = \frac{1}{2} k t^2 + k_0 t + Z\end{aligned}$$

Il nous reste à trouver une expression pour $\theta(t)$.

On se rappelle que :

$$\begin{aligned}\underline{e}_r &= \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_\theta &= -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2 \\ \underline{e}_z &= \underline{e}_3\end{aligned}$$

et on peut donc écrire les composantes de $\underline{v}(\underline{x}, t)$ en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} v_r = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2 = x_2 x_3 \cos \theta - x_1 x_3 \sin \theta \\ v_\theta = -\sin \theta v_1 + \cos \theta v_2 = -x_1 x_3 \cos \theta - x_2 x_3 \sin \theta \\ v_\theta = v_z = k t + k_0 \end{cases}$$

Le terme $r d\theta = v_\theta dt$ peut donc s'écrire :

$$d\theta = \frac{-1}{r} (x_1 x_3 \cos \theta + x_2 x_3 \sin \theta) dt = \frac{-1}{r} (r \cos \theta z \cos \theta + r \sin \theta z \sin \theta) dt \text{ avec } \begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

On a donc :

$$d\theta = -(z \cos \theta \cos \theta + z \sin \theta \sin \theta) dt = -z (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dt = -z dt \Rightarrow \theta = -\frac{k t^3}{6} - \frac{k_0 t^2}{2} - Z t + \theta_0$$

Si on fait maintenant le bilan, les trajectoires en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = -\frac{kt^3}{6} - \frac{k_0 t^2}{2} - Zt + \theta_0 \\ z = \frac{1}{2}kt^2 + k_0 t + Z \end{cases}$$

Visualisation

```
figure; xlabel('x1');ylabel('x2');zlabel('x3');
t=[0:0.01:5];
R=sqrt(X1^2+X2^2);theta0=0; Z=0; k=1;k0=1;
r=R;
theta=-(k/6)*t.^3-(k0/2)*t.^2-Z*t+theta0;
z=(k/2)*t.^2+k0*t+Z;
[Xc,Yc,Zc] = cylinder(R);
surf(Xc,Yc,20*Zc);
[X,Y,Z] = pol2cart(theta,r,z);
hold on; plot3(X,Y,Z)
```

