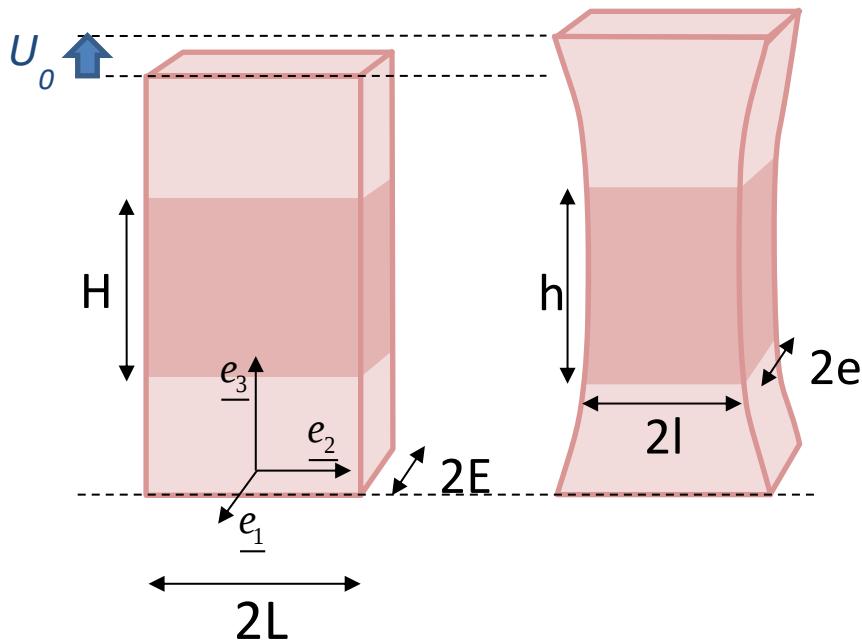


Traction d'un échantillon mou

On considère le cas de la traction selon $\underline{e}_3$ d'un parallélépipède constitué d'un matériau mou. On impose un déplacement croissant $U_0 \underline{e}_3$ à l'extrémité supérieure de l'échantillon, tandis que l'extrémité inférieure est bloquée. On se propose de comparer les composantes selon $\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ des différents tenseurs de déformation vus dans le cours.



Pour une telle transformation, on va s'intéresser uniquement au tiers central de hauteur H de l'échantillon dans lequel l'état de déformation va être considéré comme homogène. On se donne la transformation suivante dans tout ce milieu :

$$\begin{cases} x_1 = (1 - \nu(\lambda - 1)) X_1 \\ x_2 = (1 - \nu(\lambda - 1)) X_2 \\ x_3 = \lambda X_3 \end{cases}$$

Dans cette équation, λ correspond naturellement à la dilatation selon $\underline{e}_3$ (i.e. il n'y a pas de déformation lorsque $\lambda = 1$), et ν correspond à un coefficient de dilatation transverse.

Méthodologie

Le cours nous dit que les différents tenseurs des déformations sont tous construits à partir du tenseur gradient de la transformation, qui peut s'écrire à partir du champ de déplacement : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$

Il va donc s'agir tout d'abord de calculer le champ de déplacement, puis son gradient, puis $\underline{\underline{F}}$. Nous comparerons ensuite les valeurs des composantes selon $\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ des tenseurs suivants :

- tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$
- tenseur des déformations linéarisé en HPP : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Résolution

Le champ de déplacement s'écrit facilement à partir de l'équation de la transformation qui est donnée :

$$\underline{u}(\underline{X}) = \underline{x}(\underline{X}) - \underline{X} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = (1 - \nu(\lambda - 1))X_1 - X_1 = -\nu(\lambda - 1)X_1 \\ u_2 = (1 - \nu(\lambda - 1))X_2 - X_2 = -\nu(\lambda - 1)X_2 \\ u_3 = \lambda X_3 - X_3 = (\lambda - 1)X_3 \end{cases}$$

Le gradient d'un tel champ vectoriel est facile à écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{u} &= u_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ &= -\nu(\lambda - 1)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (\lambda - 1)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned}$$

On peut donc calculer facilement le tenseur gradient de la transformation, qu'on va noter par exemple ici en notation matricielle :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{Grad}} \underline{u} + \underline{\underline{I}} \\ [\underline{\underline{F}}] &= [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] + [\underline{\underline{I}}] = \begin{pmatrix} 1 - \nu(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \nu(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange peut s'obtenir de plusieurs façons, on choisit le calcul suivant :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$

$$[\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\nu(\lambda-1))^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu(\lambda-1))^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

On constate que ce tenseur est nul lorsqu'il n'y a pas de déformation.

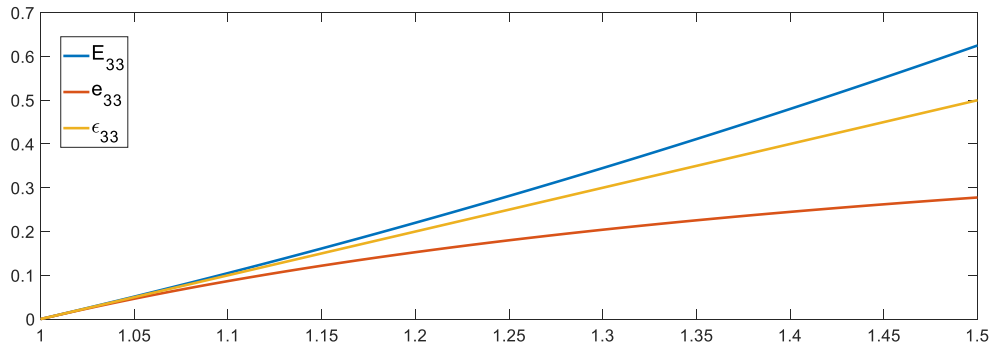
Enfin, calculons le tenseur des déformations linéarisé qui est valable uniquement en HPP (i.e. quand $\lambda \approx 1$) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\nu(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & -2\nu(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Comparons donc maintenant les composantes selon $\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ des tenseurs précédents :

$$E_{33} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad e_{33} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \varepsilon_{33} = \lambda - 1$$



On constate d'une part que ces quantités deviennent très différentes lorsque la déformation devient importante, et d'autre part qu'elles sont toutes équivalentes lorsque la dilatation est unitaire.