
Traction biaxiale

On cherche à caractériser les propriétés élastiques d'un échantillon de peau, pour évaluer l'effet d'une crème anti-âge. On va faire l'hypothèse (fausse en grandes déformations !) que la peau a un comportement élastique linéaire isotrope.

On effectue un test de traction biaxiale sur un échantillon de peau dont l'épaisseur e est négligeable devant sa largeur l et sa longueur L .

On considère que dans les deux directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ on effectue une traction en opposition de phase de telle sorte qu'on ait la transformation suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1(t) X_1 \\ x_2 = \lambda_2(t) X_2 \\ x_3 = \lambda_3(t) X_3 \end{cases}$$

Dans cette expression, on note λ_1 , λ_2 et λ_3 les dilatations (en fonction du temps) dans les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$. Seules les dilatations λ_1 et λ_2 sont imposées lors de l'essai.

1. Calculer le tenseur gradient de la transformation correspondant à la cinématique ci-dessus.

$$\text{Première option : } \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \lambda_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \\ \text{Seconde option : } &= \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \left((\lambda_1 X_1 - X_1) \underline{e}_1 + (\lambda_2 X_2 - X_2) \underline{e}_2 + (\lambda_3 X_3 - X_3) \underline{e}_3 \right) \\ &= \underline{\underline{I}} + (\lambda_1 - 1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\lambda_2 - 1) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + (\lambda_3 - 1) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ &= \lambda_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned}$$

2. On considère que la peau est un matériau incompressible, en raison de la présence d'eau. En déduire une expression de λ_3 en fonction de λ_1 et λ_2 .

Incompressible $\rightarrow$ pas de variation de volume $\rightarrow \det \underline{\underline{F}} = 1$

$$\det \underline{\underline{F}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$$

3. Calculer la déformation de Green-Lagrange associée à la cinématique ci-dessus.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_1^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda_3^2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \underline{\underline{I}}) \\ &= \frac{1}{2} ((\lambda_1^2 - 1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\lambda_2^2 - 1) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + (\lambda_3^2 - 1) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \end{aligned}$$