

I) Fonctions linéaires

1/2

Une équation linéaire :

$$f(u) = 0. \quad (1)$$

est une équation qui vérifie la superposition des solutions :

si x_1 et x_2 vérifient (1), alors leur combinaison linéaire $\alpha x_1 + \beta x_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) vérifie (1) lui-même de (1) :

$$(2) \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \underbrace{f(x_1)}_{=0} + \beta \underbrace{f(x_2)}_{=0} = 0.$$

Exemples de fct linéaires :

en 1D : $f(x) = 3x$.

en nD : $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ (système linéaire).

Propriétés importantes :

— Par le principe de superposition de solutions, on peut toujours calculer le solution analytique de α équations linéaires, par des méthodes systématiques (ex : cours d'EDO du 1er et 2nd ordre).

— Malheureusement, la plupart des équations de la physique sont non-linéaires.

II) Fonc / équations linéaires:

2/2

Une fonction ~~linéaire~~ non linéaire ne vérifie pas la superposition de solutions (2).

Exemple : $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x)$
on a bien $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$.

En conséquence, il n'existe pas de méthodes systématiques pour résoudre les équations non-linéaires, sauf dans des cas très particuliers, p. ex :

- polynômes du 2nd ordre : $ax^2 + bx + c = 0$ et 3^{em} ordre, pour les ordres impaires 2.
- EDO : méthodes de Riccati, etc...

Pour résoudre des eq^{ts} non-linéaires issus de modèles physiques complexes (niveau Master) il faut utiliser des méthodes numériques.

Page (8) du Cours :

Définition (Stabilité)

Une fonction d'itération Φ est stable si :

$$|\Phi'(x_*)| < 1 \quad (11)$$

Théorème (Convergence)

Si Φ est stable et contractante, alors pour x_0 "suffisamment" proche de x_* , la méthode du point fixe va converger.

Démo simplifiée

On fait un DL en x_* :

$$\underbrace{\Phi(x_{n+1})}_{x_{n+1}} \approx \underbrace{\Phi(x_*)}_{x_*} + \Phi'(x_*) (x_n - x_*)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_* \approx \Phi'(x_*) (x_n - x_*)$$

$$\Rightarrow E_{n+1} \approx |\Phi'(x_*)| E_n \quad \text{avec } E_n = |x_n - x_*|$$

$$\text{Si on pose } C \equiv |\Phi'(x_*)| < 1$$

alors la suite géométrique

$$E_{n+1} \approx C E_n = C^2 E_{n-1} = \dots = C^{n+1} E_0$$

converge vers 0.