

TD 3 : formule et théorème de Cauchy

Exercice 1. — Paramétrer les chemins suivants :

1. Le segment reliant $1 + 2i$ à $3 - 4i$.
2. Le cercle de centre $2 + i$ de rayon 2, parcouru dans le sens direct en partant de i .
3. Le quart de cercle orienté positivement de centre $1 + i$ reliant i à 1.
4. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$ qui relie les points d'affixe $1 + i$ à $2 + 4i$.

Ensuite, calculer dans chaque cas l'intégrale $\int_{\gamma} z dz$.

Exercice 2. — Dessiner les chemins suivants :

$$\gamma_1 : \begin{cases} [1, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto e^{-it}; \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto 1 + i + 2e^{it}; \end{cases} \quad \gamma_3 : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto t + i \cosh(t); \end{cases}$$

Exercice 3. — [Variation sur Liouville] Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière à croissance polynomiale, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M|z|^k.$$

Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 4. — [Variation sur Liouville] Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière dont la partie réelle est bornée. Montrer que f est constante. On pourra par exemple chercher une formule intégrale pour a_n en fonction non pas de f , mais de sa partie réelle u . Ou alors, on pourra utiliser la fonction exponentielle.

Exercice 5. — Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière non constante. Montrer que son image $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. — Calculer $\int_{\gamma} z e^z dz$ pour n'importe quel chemin allant de 0 à i .

Exercice 7. — Calculer $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ pour les deux chemins γ_1 et γ_2 suivants :

1. Le segment allant de 0 à i suivi du segment allant de i à $1 + i$;
2. Le segment allant de 0 à 1 suivi du segment allant de 1 à $1 + i$;

Exercice 8. — Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ puis $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$ pour les deux chemins suivants :

1. Le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon 1 allant de 1 à -1 .
2. Le demi-cercle inférieur de centre 0 et de rayon 1 allant de 1 à -1 .

1 Solutions des exercices

Correction de l'exercice 1.

On donne toujours des paramétrages définis sur $[0, 1]$, même si parfois, d'autres choix aurait été plus naturels.

1. Le paramétrage standard du segment joignant a et b dans cet ordre est $\gamma = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, (1-t)a + tb$. Son vecteur vitesse est $b-a$. On a donc $\gamma(t) = (1-t)(1+2i) + t(3-4i)$.
2. Le cercle de centre $2+i$ de rayon 2, parcouru dans le sens direct en partant de i est paramétré par $\gamma(t) = 2+i+2e^{i(\pi+2\pi t)}$.
3. Le quart de cercle orienté positivement de centre $1+i$ reliant i à 1 est paramétré par $\gamma(t) = 1+i+e^{i(\pi+t\pi/2)}$.
4. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$ qui relie les points d'affixe $1+i$ à $2+4i$ est paramétré par $\gamma(t) = 1+t+i(1+t)^2$.

Des paramétrages plus naturels, mais définis sur d'autres intervalles que $[0, 1]$, pourraient être :

1. Rien de plus naturel.
2. Le cercle de centre $2+i$ de rayon 2, parcouru dans le sens direct en partant de i est paramétré par $\gamma(u) = 2+i+2e^{iu}$, pour $u \in [\pi, 3\pi]$.
3. Le quart de cercle orienté positivement de centre $1+i$ reliant i à 1 est paramétré par $\gamma(u) = 1+i+e^{iu}$, avec $u \in [\pi, 3\pi/2]$.
4. L'arc de parabole d'équation $y = x^2$ qui relie les points d'affixe $1+i$ à $2+4i$ est paramétré par $\gamma(u) = u+iu^2$, pour $u \in [1, 2]$.

Correction de l'exercice 3.

Comme pour Liouville, on utilise la formule intégrale pour a_n pour montrer que les a_n sont nuls si $n > k$.

Plus précisément, pour $r > 0$, la formule de Cauchy donne :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt$$

Donc par inégalité triangulaire, on a

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} Mr^k dt \leq Mr^{k-n}.$$

Si $n > k$ on obtient que $|a_n|$ est majorée par une quantité qui tend vers zéro lorsque $r \rightarrow +\infty$. Comme $|a_n|$ ne dépend pas de r , on en déduit que $|a_n| = 0$ et donc $a_n = 0$.

Correction de l'exercice 4.

Première solution : Si la partie réelle de f est bornée, alors le module de $\exp(f)$, qui vaut $\exp(\operatorname{Ré}(f))$, est lui aussi borné. Donc la fonction holomorphe entière $\exp \circ f$ est constante. Ceci ne signifie pas encore directement que f est constante, il faut préciser. Soit K la valeur de $\exp \circ f$ et soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(a) = K$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un entier k_z qui dépend a priori de z , tq $f(z) = a + 2ik_z\pi$.

Seulement, f est continue, donc son image est connexe, donc tous les entiers k_z sont égaux. Finalement, f est bien constante.

Deuxième solution. Si on note u la partie réelle de f , on a la formule intégrale suivante, pour un rayon r inférieur au rayon de convergence :

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(re^{it})e^{-int} dt$$

Cette formule est une variation de la formule de Cauchy et n'est pas à apprendre par cœur mais vous devez pouvoir la retrouver : elle se prouve de la même façon. On développe en série entière $f(z) = \sum a_n z^n$

et $\overline{f(z)} = \sum \overline{a_n} \bar{z}^n$, on en déduit un développement en série de fonctions de $u = f + \bar{f}$, puis on calcule le second membre, en remplaçant u par sa série et en intervertissant par convergence normale.

Notez qu'il y a un facteur 2 de différence avec la formule usuelle.

Ensuite, c'est pareil que pour l'exercice précédent, on majore $|a_n|$ par inégalité triangulaire sur l'intégrale par une quantité qui tend vers zéro lorsque $r \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 5.

Supposons que l'image ne soit pas dense. Alors il existe $a \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ tels que $\overline{\mathbb{D}(a, \epsilon)}$ est en-dehors de l'image, autrement dit tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z) - a| > \epsilon.$$

On en déduit que la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z) - a}$ est bien définie et holomorphe comme quotient d'une holomorphe par une holomorphe ne s'annulant pas. De plus, elle est bornée, car

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Par le théorème de Liouville, on en déduit que g est constante, donc f aussi, contradiction!

Correction de l'exercice 6.

La fonction $z \mapsto ze^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, donc elle admet une primitive. Le choix du chemin importe donc peu.

On peut alors :

- Calculer une primitive, par exemple par IPP (là il faudrait justifier pourquoi l'IPP marche pour des fonctions holomorphes, mais la preuve est la même que la preuve classique; dans tous les cas, on peut vérifier que l'on obtient bien une primitive en redérivant). On trouve $e^z(z-1)$ (modulo constante).
- Choisir un chemin simple, par exemple $t \mapsto it$. On a alors l'intégrale

$$\int_0^1 ite^{it} i dt = - \int_0^1 te^{it} dt$$

Or une primitive de $t \mapsto -te^{it}$ est (toujours par IPP) $t \mapsto e^{it}(it-1)$.

Dans les deux cas, on trouve la même chose à savoir $1 + (i-1)e^i$.

Correction de l'exercice 7.

Sauf erreur de calcul on trouve $\frac{4+i}{3}$ et $\frac{1+4i}{3}$.

Correction de l'exercice 8.

Pour la première forme différentielle, on a une fonction qui est certes holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais elle n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. On calcule les deux intégrales curvilignes avec la définition d'intégrale curviligne, et on trouve $i\pi$ et $-i\pi$. (paramétrage $\gamma_1 : t \mapsto e^{i\pi t}$ et $\gamma_2 : t \mapsto e^{-i\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$).

Pour la deuxième forme différentielle, la fonction est holomorphe sur un ouvert qui n'est certes pas simplement connexe, mais elle admet tout de même une primitive sur $\mathbb{C}^*$ à savoir $F : z \mapsto -1/z$. Les deux intégrales curvilignes sont donc égales, et valent $F(-1) - F(1) = 2$. On peut aussi les calculer en utilisant le paramétrage, et on trouvera la même chose dans les deux cas.

Par exemple, pour le demi-cercle supérieur, on paramètre par $t \mapsto e^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$, et l'intégrale curviligne vaut donc

$$\int_0^\pi \frac{1}{(e^{it})^2} i e^{it} dt = \int_0^\pi i e^{-it} dt = [-e^{-it}]_0^\pi = 2$$