

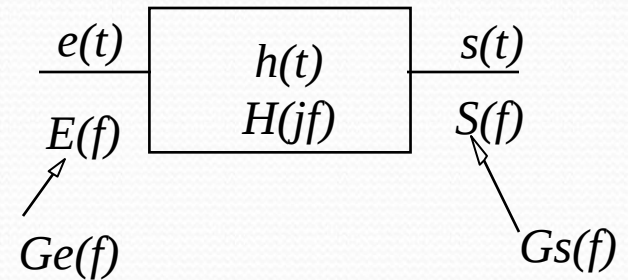


Bruit & Modulation

Fonction de transfert en puissance

Soit un système LTI dans le temps tel que :

On peut définir une DSP en entrée de Processus $G_e(f)$ ou en sortie $G_s(f)$.



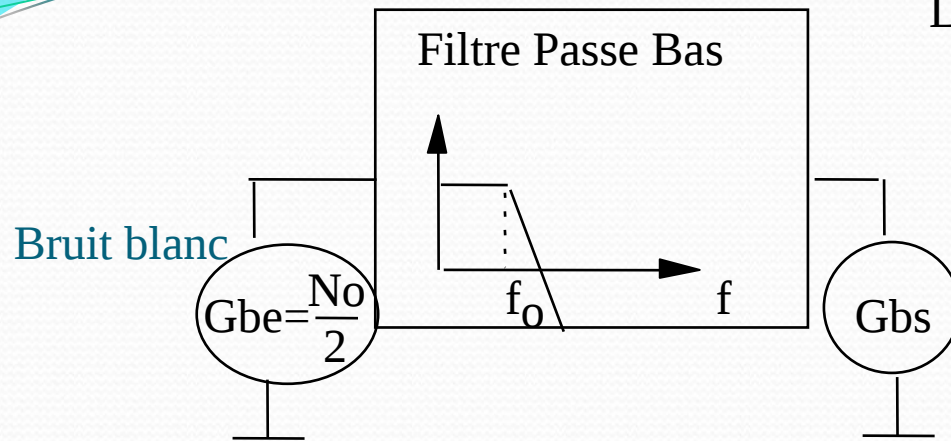
Dans ce cas $G_s(f)$ devient :
$$G_s(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} S(f) S(-f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} H(f) E(f) H(-f) E(-f)$$

On en déduit que :

$$G_s(f) = |H(f)|^2 \cdot G_e(f)$$

Ce qui signifie qu'en connaissant la répartition spectrale de puissance de l'entrée et la fonction de transfert d'un système on peut en déduire la répartition spectrale puissance de la sortie

Passage du bruit blanc à travers un filtre RC.



La fonction de transfert du filtre est de la forme :

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}$$

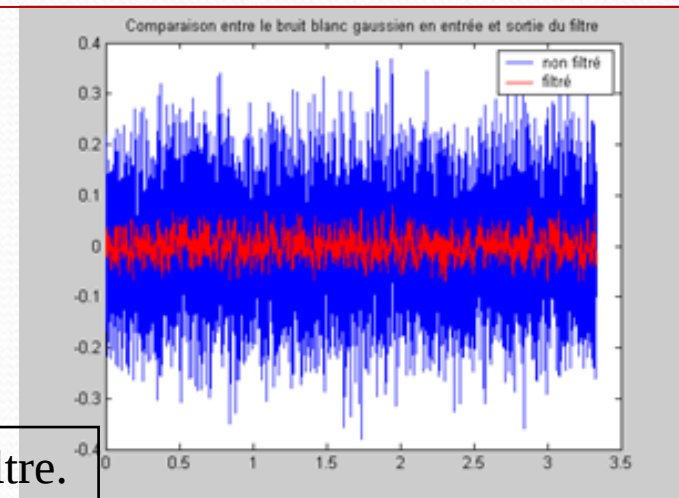
Alors en sortie de filtre la densité spectrale de puissance est de la forme :

$$|G_{bs}(f)| = |H(f)|^2 G_{be}(f) = |H(f)|^2 G_{be}(f) = \frac{N_0}{2 \left[1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right]}$$

Tension efficace de bruit est alors:

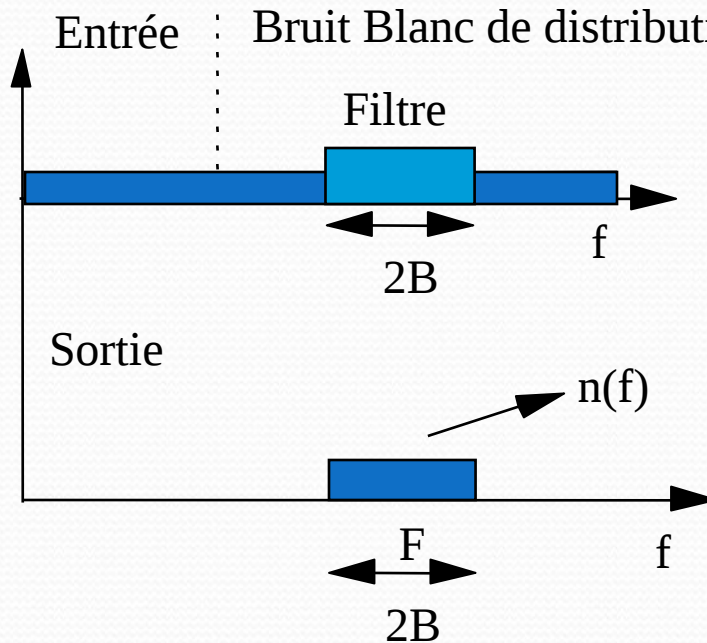
$$V^2_{effbruit} = 2 \int_0^{+\infty} G_{bs}(f) \cdot df$$

$$V^2_{effbruit} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{N_0}{2 \left[1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right]} \cdot df = \frac{\pi \cdot N_0 \cdot f_0}{2}$$



- La puissance de bruit diminue avec la bande passante du filtre.

Bruit à bande étroite



On admet qu'un bruit blanc gaussien à bande étroite peut se décomposer en 2 bruits gaussiens et les 2 composantes sont :

- indépendants
- de puissance = $\frac{1}{2}$ puissance de bruit d'entrée
- l'un en phase avec la fréquence centrale F et l'autre en quadrature

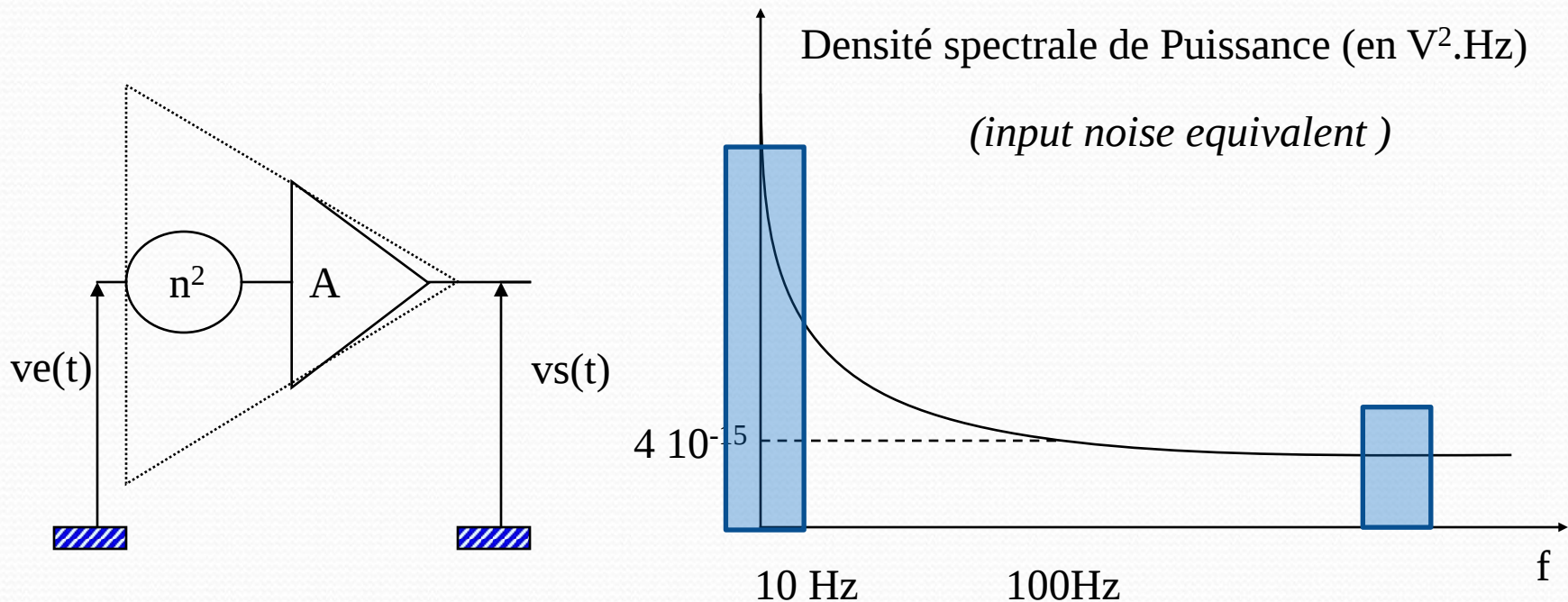
$$n(t) = [n_p(t) \cos 2\pi F t] + [n_q(t) \sin 2\pi F t]$$

$$\overline{n_p^2} = \overline{n_q^2} = \overline{n^2}$$

Ce modèle permet d'introduire une expression temporelle du bruit à bande étroite pour l'étude des systèmes

Densité spectrale de puissance des amplificateurs opérationnels

Les amplificateurs opérationnels génèrent un bruit (semi-conducteur)
équivalent en entrée → c'est une donnée constructeur



Elle représente la répartition de la puissance sur l'axe des fréquences.
La densité spectrale de puissance est quadratique c'est-à-dire qu'elle est
indépendante de la phase du signal. De plus elle est toujours réelle et positive.

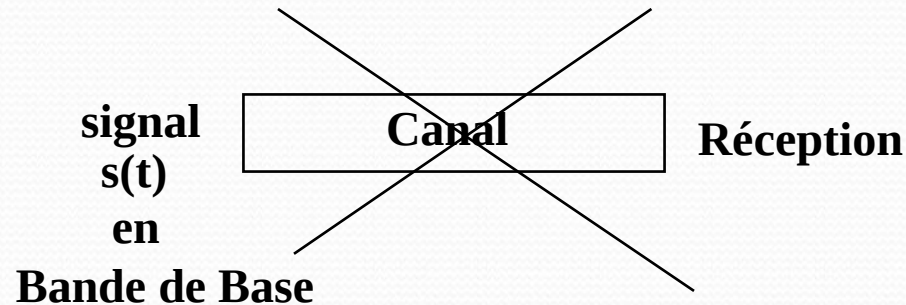


LA MODULATION

LA MODULATION

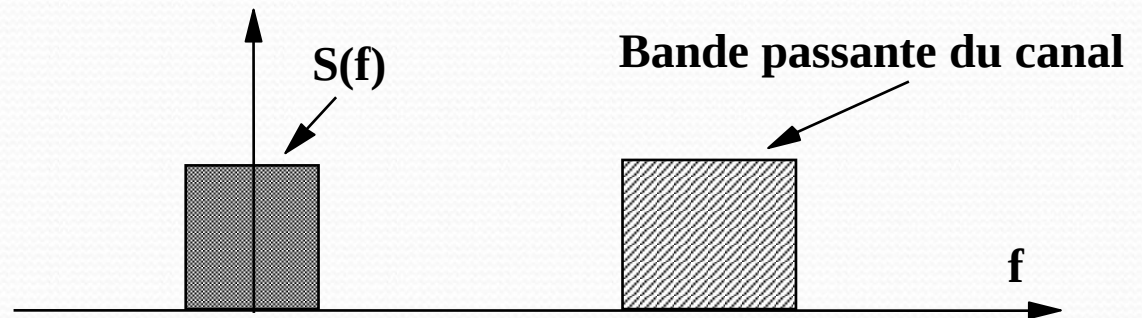
=> opération qui consiste à modifier certains paramètres de l'onde porteuse :
amplitude, fréquence, phase

Objectif



Pourquoi ?

Spectre de $s(t)$ n'est pas situé dans une bande passante intéressante



Solution ?

Une modulation par porteur

Les différents types de modulation

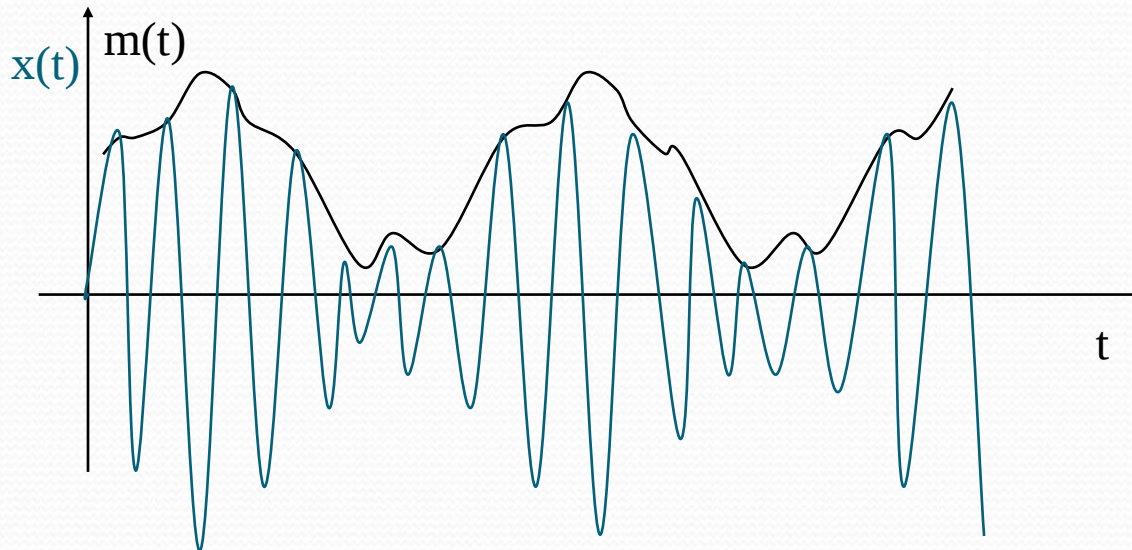
- 2 types grands types de modulation

- Modulation d'amplitude : $x(t) = m(t).p(t)$
- Modulation de phase : $\varphi_x(t) = \varphi_m(t) + \varphi_p(t)$

$p(t)$: est appelé porteur ; $m(t)$ est appelé modulant

La modulation d'amplitude : On suppose $p(t) = A \cos(\Omega.t)$

On génère $x(t)$ tel que: $x(t) = m(t).p(t) = A.m(t).\cos(\Omega.t)$



Remarque :

- la puissance $x(t)$ est variable avec $m(t)$

- très sensible aux bruits électromagnétique

- faible encombrement spectral

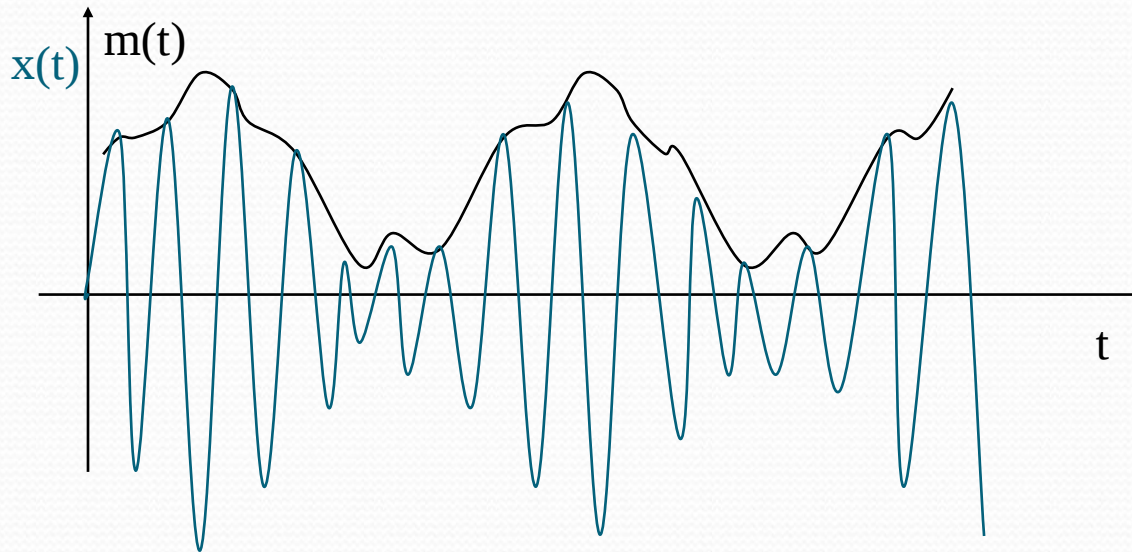
Les différents types de modulation

• Modulation d'amplitude : $x(t) = m(t).p(t)$

$p(t)$: est appelé porteur ; $m(t)$ est appelé modulant

La modulation d'amplitude : On suppose $p(t) = A \cos(\Omega.t)$

On génère $x(t)$ tel que: $x(t) = m(t).p(t) = A.m(t).\cos(\Omega.t)$



Remarque :

- la puissance $x(t)$ est variable avec $m(t)$

- très sensible aux bruits électromagnétique

- faible encombrement spectral

MODULATION D'AMPLITUDE

modulation d'amplitude

k = profondeur de modulation

avec porteur

$$m(t) = 1 + k.s(t)$$

sans porteur

$$m(t) = k.s(t)$$

Remarque :

- En radio diffusion publique :
modulation ordinaire = modulation avec porteur

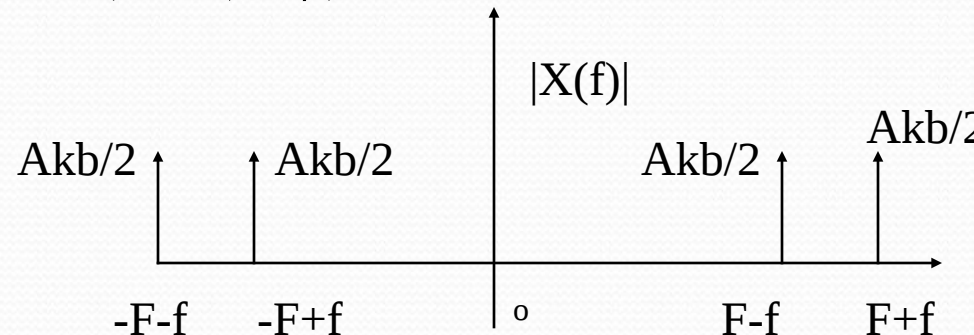
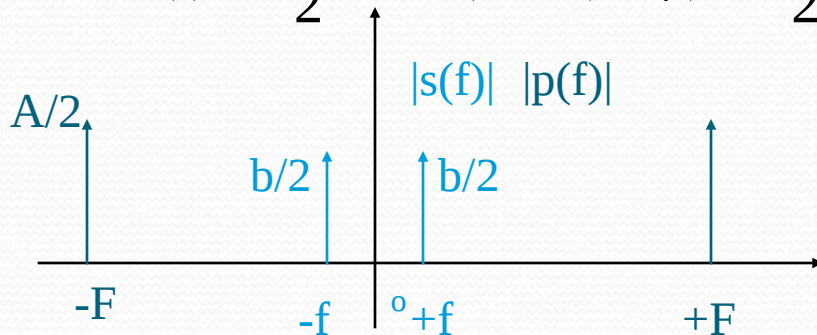
Modulation par porteur sinusoïdal de fréquence F $p(t) = A \cos \Omega t$

Soit un signal $s(t)$: $s(t) = b \cos(\omega t + \varphi)$

a) sans porteur : $m(t) = k.s(t)$

$$x(t) = p(t).m(t) = A.k.b.\cos(\omega t + \varphi).\cos \Omega t$$

$$x(t) = \frac{A.k.b}{2}.\cos(\Omega + \omega)t + \varphi + \frac{A.k.b}{2}.\cos(\Omega - \omega)t - \varphi$$

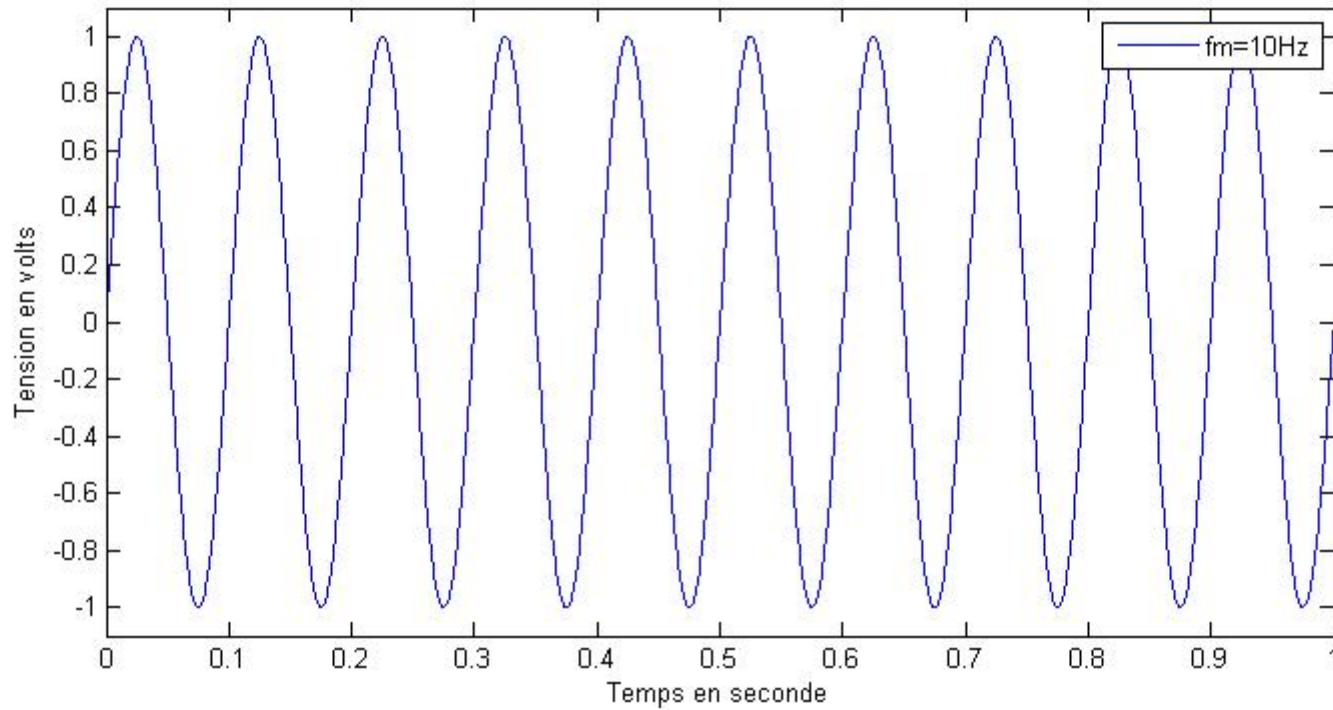


Au sens des distributions

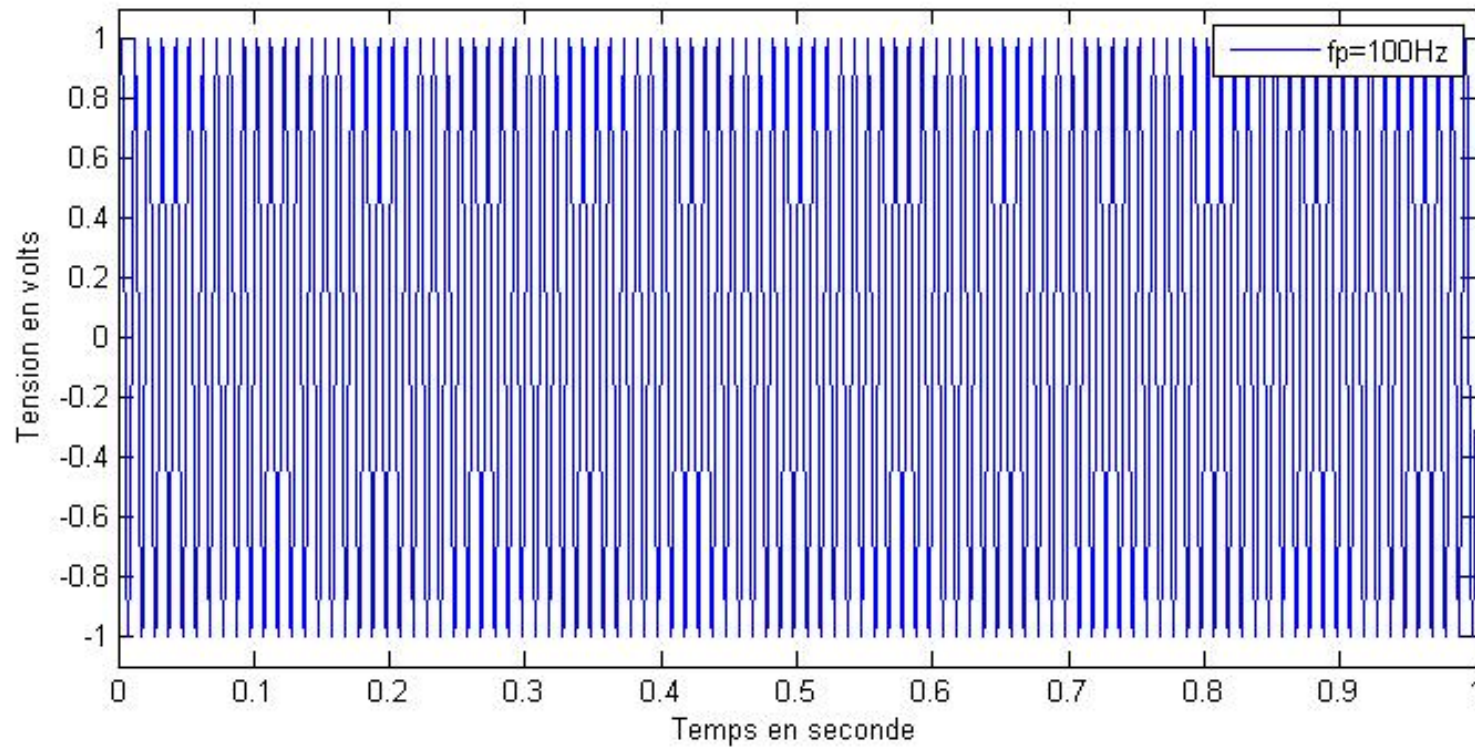
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \delta(f - f_0)$$

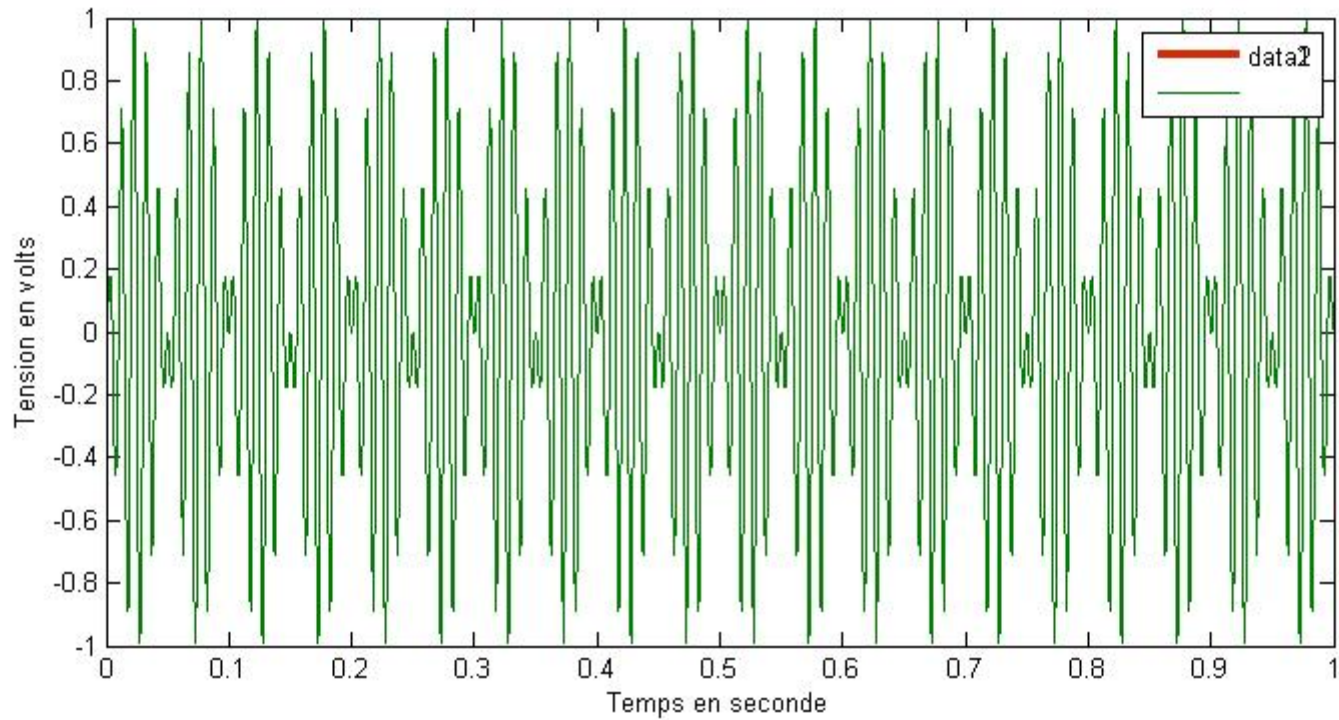
Signal Modulant $m(t)$



Signal porteur $p(t)$



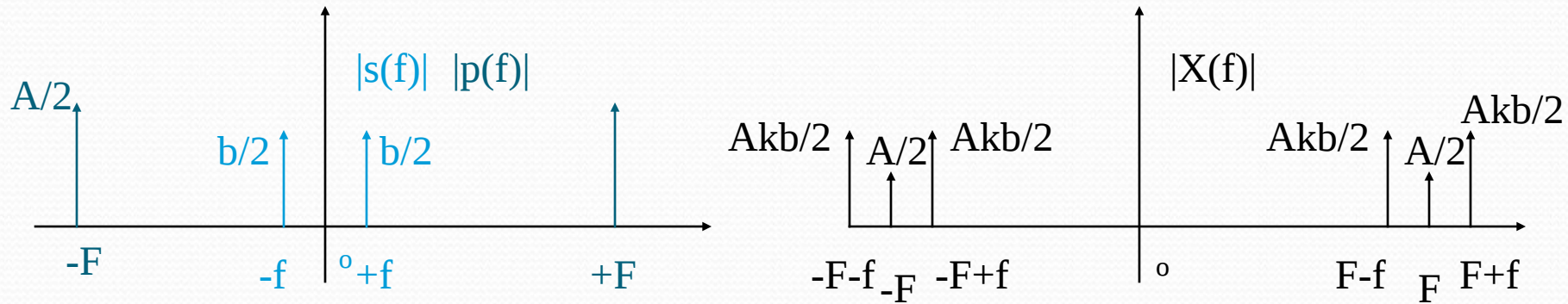
Signal modulé $x(t)$



b) avec porteur : $m(t) = 1+k.s(t)$

$$x(t) = p(t).m(t) = A[1+k.b.\cos(\omega t + \varphi)]\cos\Omega t$$

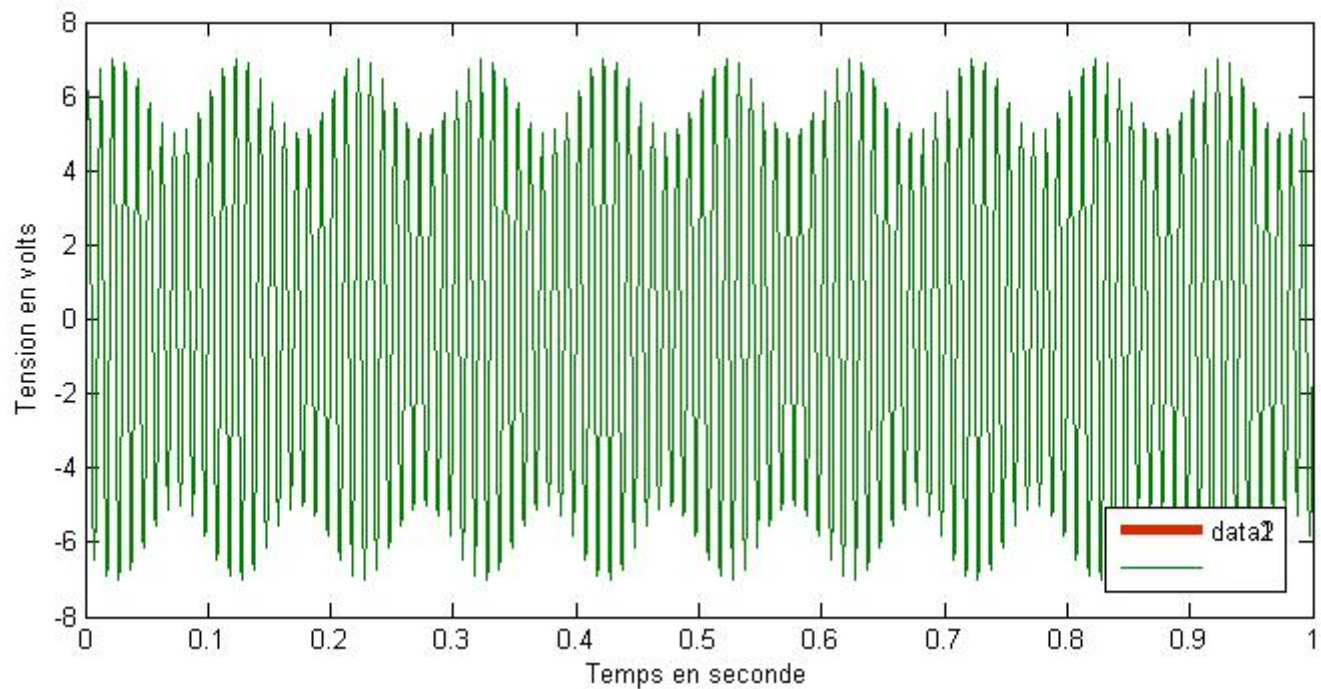
$$x(t) = A\cos\Omega t + \frac{A.k.b}{2}.\cos(\Omega + \omega)t + \varphi + \frac{A.k.b}{2}.\cos(\Omega - \omega)t - \varphi$$



Remarques :

- grande influence du bruit
- la moitié de la puissance est consommée par la porteuse
- reconstitution du signal simple par détection de porteuse

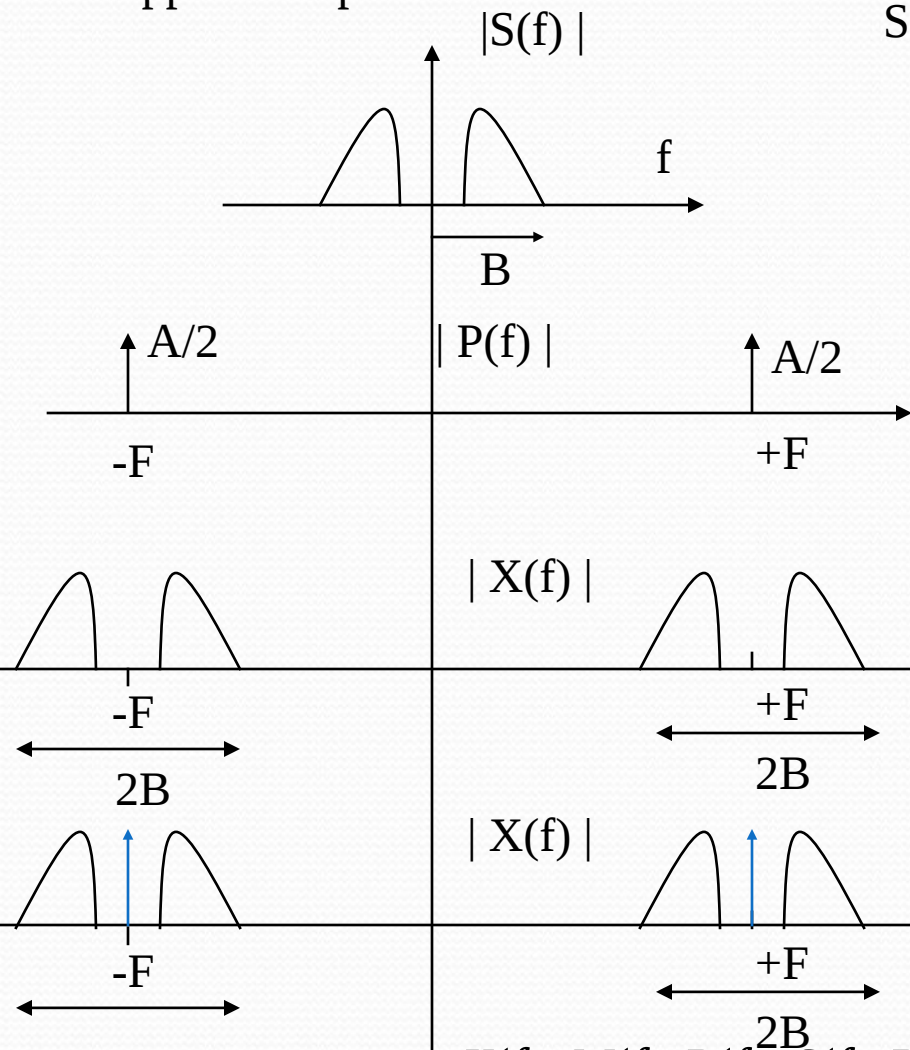
Signal modulé avec porteur $x(t)$



Modulation par porteur sinusoïdal de fréquence F $p(t)=A\cos\Omega t$

Soit un signal $s(t)$ qui n'est pas périodique mais admet une transformée de Fourier $S(f)$ à support compact

Sans porteur: $m(t)=s(t)$



$$p(t) = A \frac{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}}{2}$$

$$P(f) \rightarrow A \frac{\delta(f-F) + \delta(f+F)}{2}$$

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \cdot s(t) \cdot \frac{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}}{2}$$

$$X(f) = M(f) * P(f) = S(f) * P(f) = \frac{A}{2} [\hat{M}(f-F) + \hat{M}(f+F)]$$

Avec porteur: $m(t)=1+s(t)$

$$X(f) = M(f) * P(f) = S(f) * P(f) \rightarrow \frac{A}{2} [\hat{M}(f-F) + \hat{M}(f+F) + \delta(f-F) + \delta(f+F)]$$

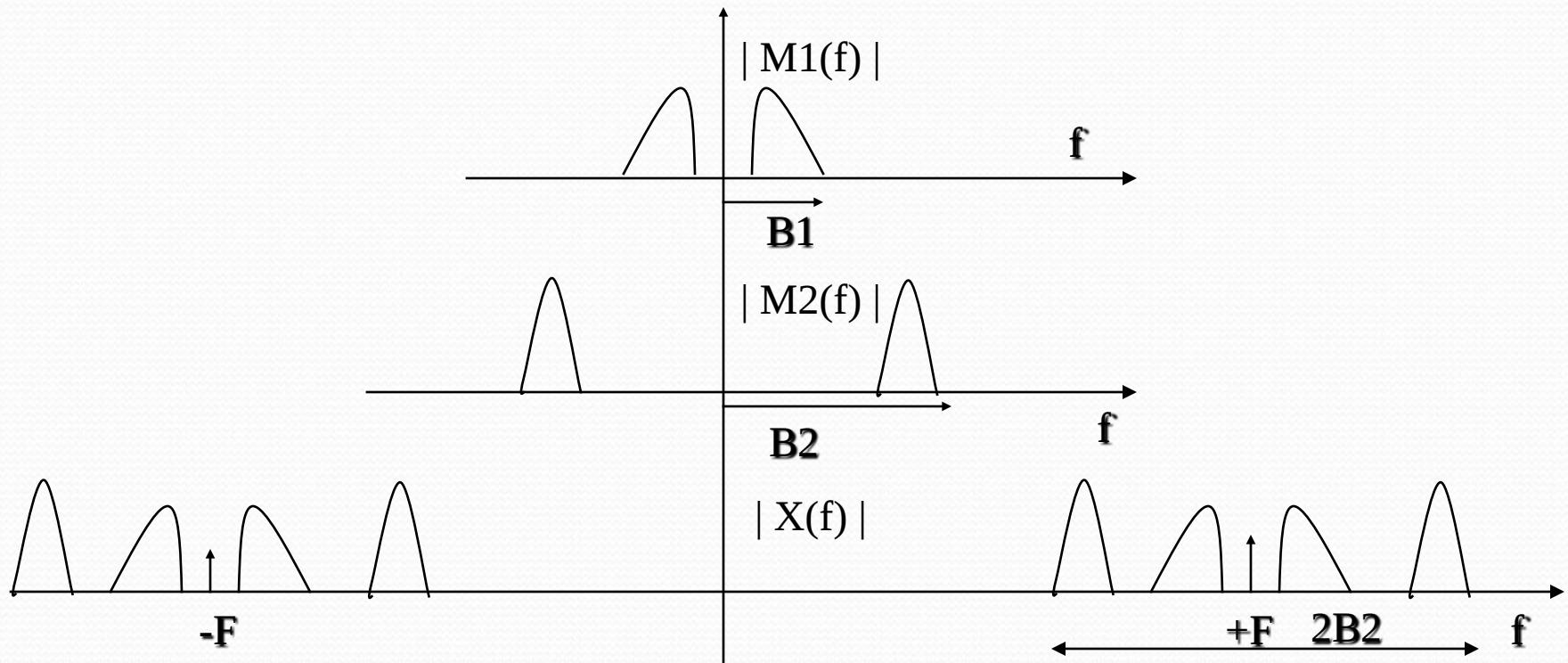
Linéarité de la modulation d'amplitude

Linéarité de la modulation d'amplitude par rapport au modulant

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t) \quad p(t) = A \cos \Omega t \quad m_1(t) \xrightarrow{F} M_1(f) \quad m_2(t) \xrightarrow{F} M_2(f)$$

$$x(t) = [m_1(t) + m_2(t)] \cdot p(t) = m_1(t) \cdot p(t) + m_2(t) \cdot p(t)$$

$$X(f) = [M_1(f) + M_2(f)] * P(f) = M_1(f) * P(f) + M_2(f) * P(f)$$



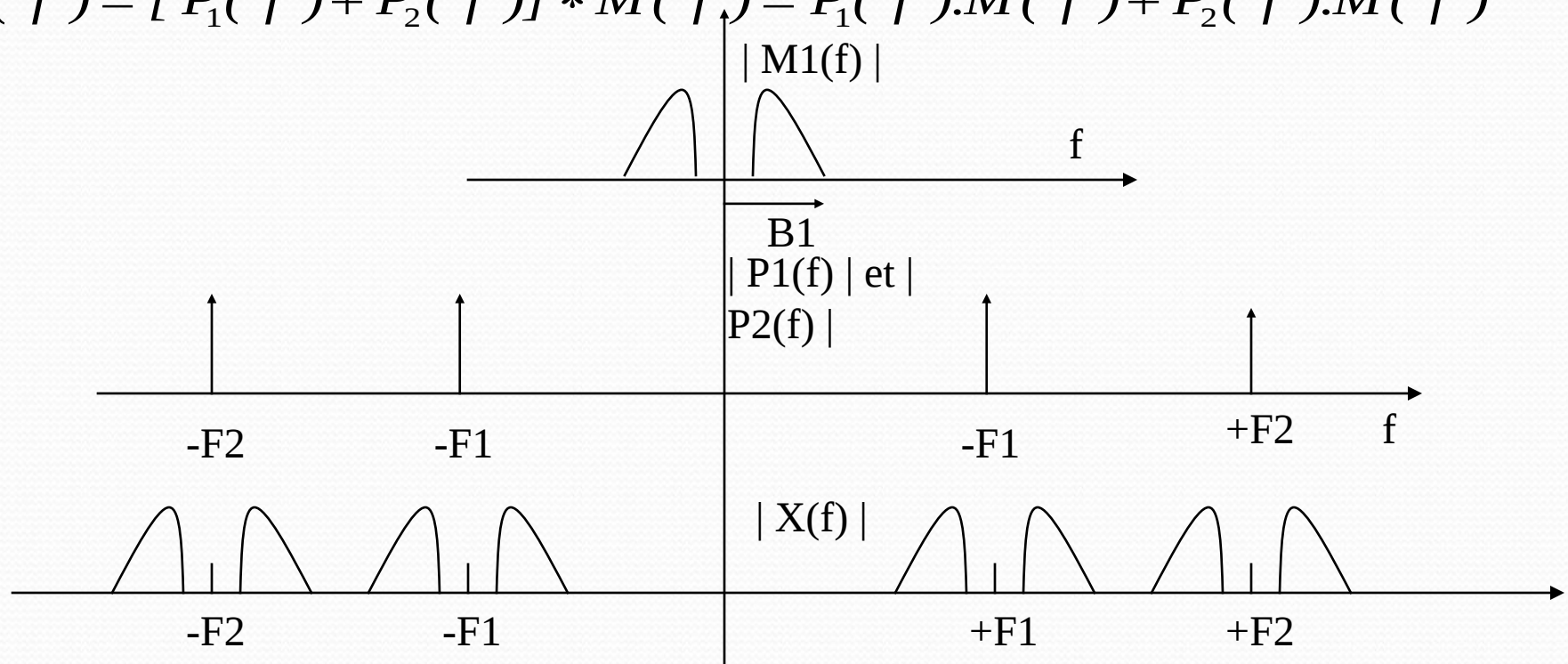
Linéarité de la modulation d'amplitude

Linéarité de la modulation d'amplitude par rapport au porteur $p(t)=p_1(t)+p_2(t)$

$$p_1(t)=A\cos 2\pi F_1 t \quad p_2(t)=B\cos 2\pi F_2 t \quad A=B \quad m_1(t) \xrightarrow{F} M_1(f)$$

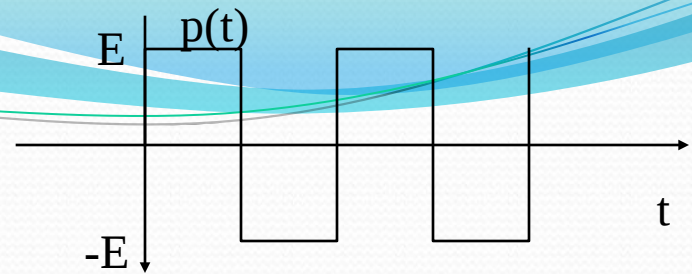
$$x(t)=[p_1(t)+p_2(t)].m(t)=p_1(t).m(t)+p_2(t).m(t)$$

$$X(f)=[P_1(f)+P_2(f)]*M(f)=P_1(f).M(f)+P_2(f).M(f)$$

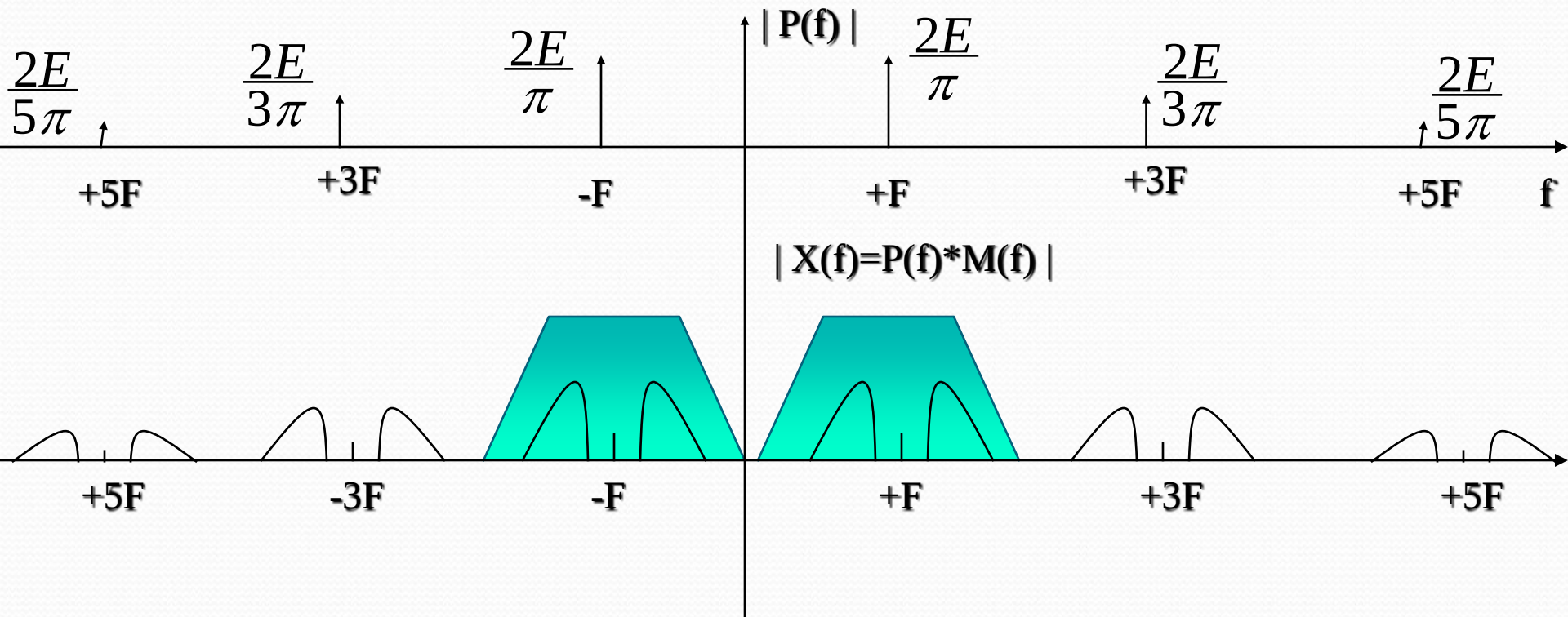


Linéarité par rapport au porteur

Application : le porteur peut être un signal carré

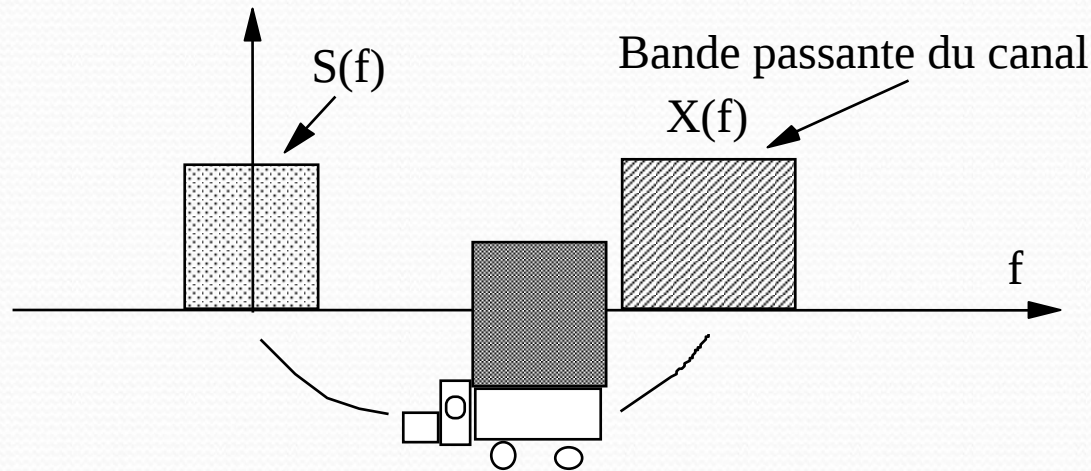


$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4E}{\pi(2n+1)} \cdot \sin((2n+1)\Omega t + \varphi_n)$$



Pour extraire le signal d'un seul porteur il suffit de filtrer par un filtre passe bande de largeur $2B$ (largeur de bande de $M(f)$)

DÉMODULATION



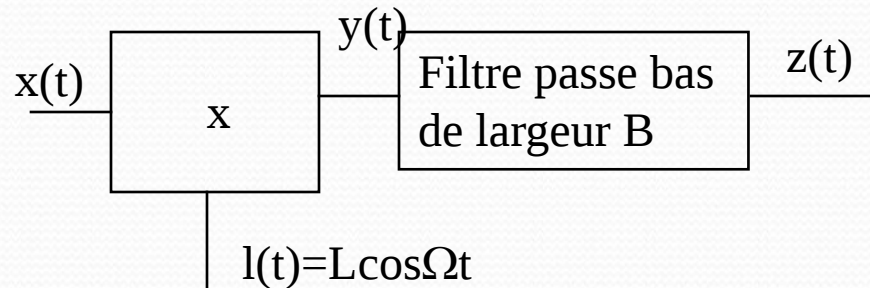
Opération qui consiste à obtenir l'estimée de $s(t)$ à partir de $x(t)$

Différents types de démodulation:

- simple ou ordinaire
- démodulation synchrone ou détection synchrone

Démodulation synchrone

Démodulation = Modulation



$$l(t) = L \cdot \cos \Omega \cdot t$$

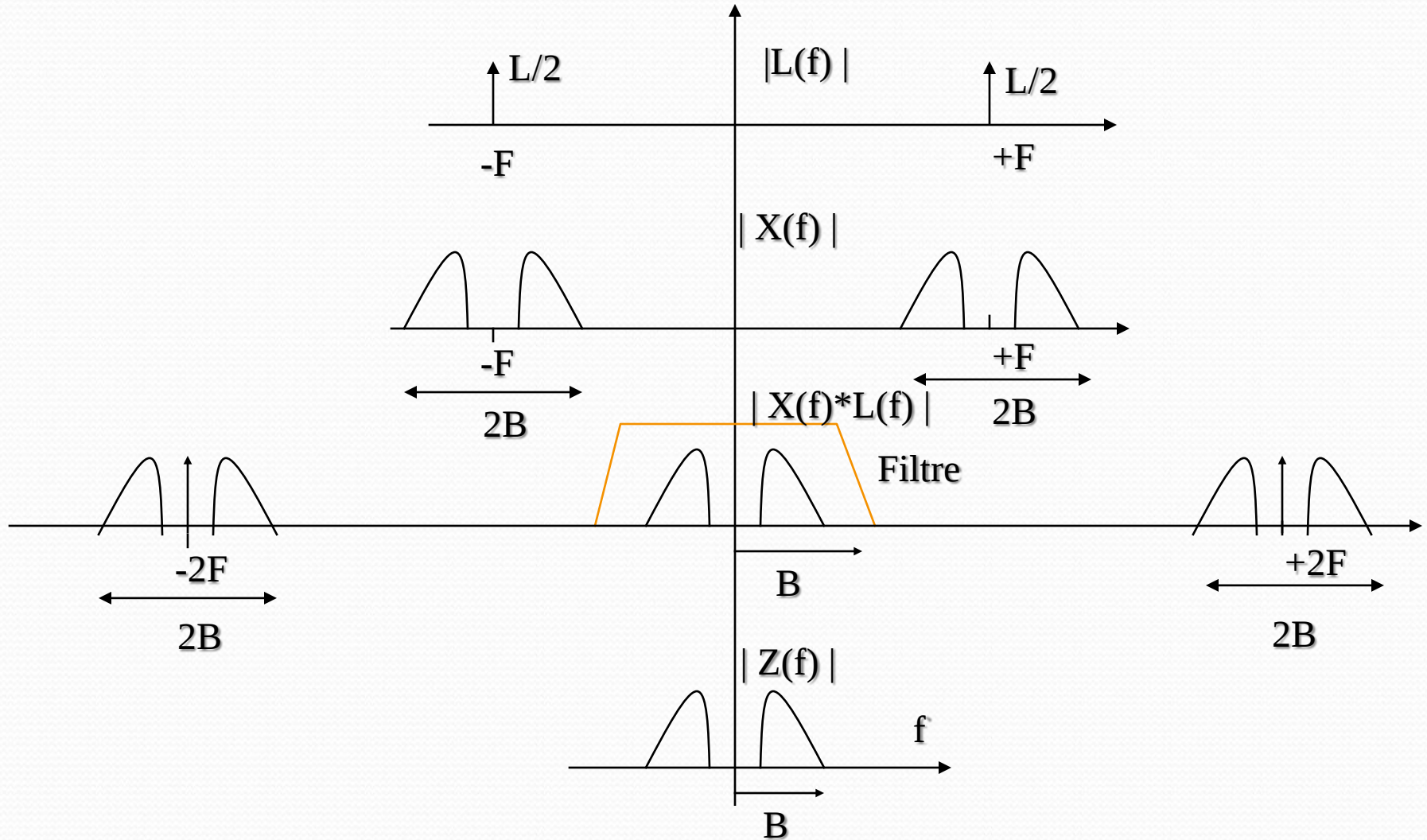
$$x(t) = A \cdot m(t) \cdot \cos \Omega t$$

$$l(t) \cdot x(t) = A \cdot m(t) \cdot L \cdot \cos^2 \Omega t$$

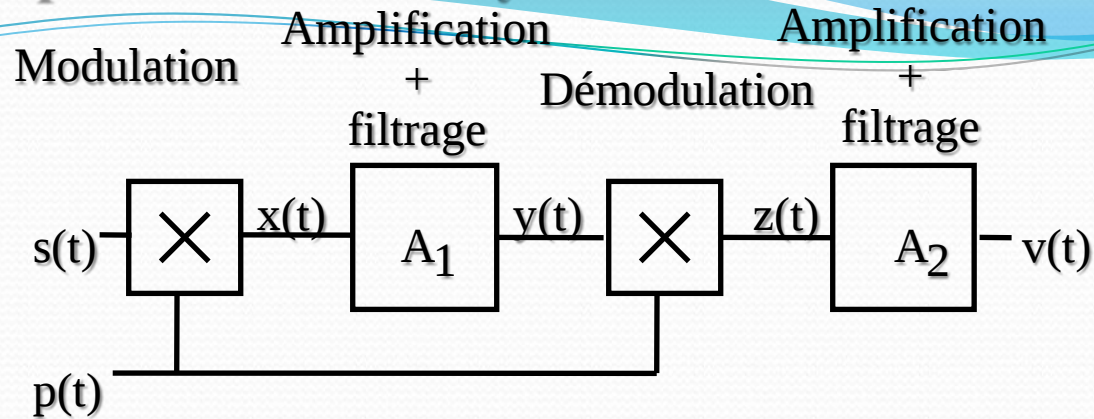
$$x(t) \cdot l(t) = \frac{1}{2} (A \cdot L \cdot m(t) + A \cdot L \cdot m(t) \cos 2\Omega t)$$

après le filtre :
$$z(t) = [x(t) \cdot l(t)]_{\text{filtré}} = \frac{1}{2} A \cdot L \cdot m(t)$$

Démodulation synchrone

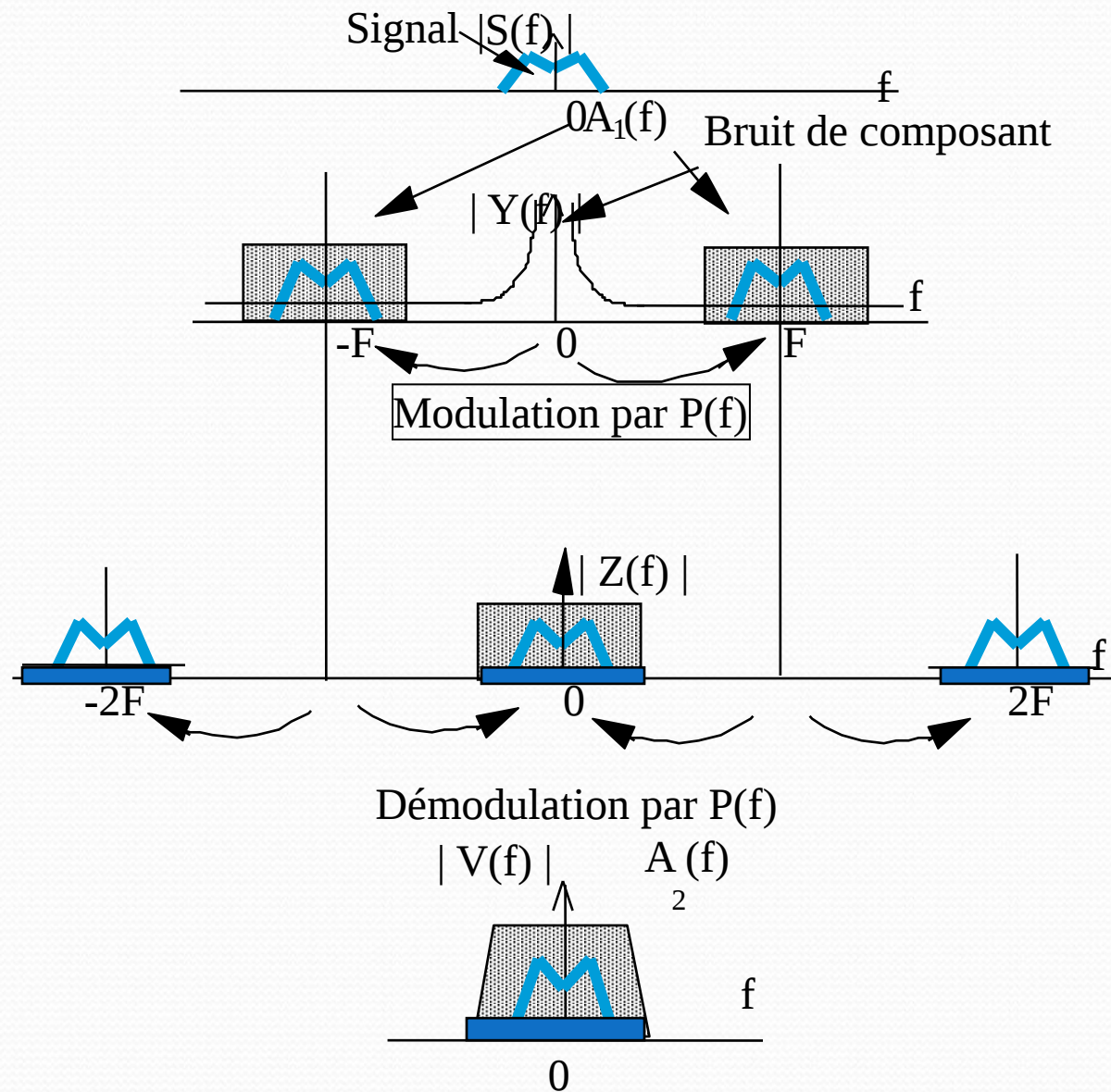


Principe de Détection synchrone et bruit des amplis



temps	fréquence
$s(t)$	$S(f)$ spectre basse fréquence
$x(t) = s(t).p(t) = s(t).\cos\Omega t$	$Y(f) = A_1(f).X(f)$ $= \frac{[A_1(f).S(f-F) + A_1(f).S(f+F)]}{2}$
$z(t) = A_{1..}.s(t).\frac{1 + \cos 2\Omega t}{2}$	$Z(f) = \frac{[Y(f-F) + Y(f+F)]}{2}$ $Z(f) = A_1(f-F)\frac{[S(f-2F) + S(f)]}{4}$ $+ A_1(f+F)\frac{[S(f+2F) + S(f)]}{4}$
$v(t) = A1. A2 .s(t)/2$	$V(f) = A2(f) . Z(f)$

Transformée de Fourier



Bruit et détection synchrone

Le modèle de bruit défini dans une bande étroite B_s :

$$n(t) = [n_p(t) \cos 2\pi F t] + [n_q(t) \sin 2\pi F t]$$

Remarque : - $n(t)$ de l'ampli ne subit que la deuxième multiplication
- le signal $s(t)$ en subit deux.

Le bruit dans le signal $z(t)$ est $z_b(t)$:

$$z_b(t) = [n_c(t) \cdot \cos \Omega t - n_s(t) \cdot \sin \Omega t] \cdot \cos \Omega t$$

$$z_b(t) = \frac{n_c(t)}{2} + [n_c(t) \cdot \cos 2\Omega t - n_s(t) \cdot \sin 2\Omega t]$$

Après filtrage (Passe Bas) :

$$v(t) = A1.A2.s(t)/2 + A2.n'_c(t)/2$$

$n'_c(t) = n_c(t)$ [réduit à la bande B du filtre Passe Bas] $\Rightarrow$ bruit coloré faible.

Remarque :

- La puissance du bruit finale est limitée par la bande du filtre de sortie
- seule la composante en phase du bruit à bande étroite a de l'importance.

The End

