

Echangeurs de chaleurs et récupération de la chaleur fatale

Nicolas Rimbert

Professeur, ENSEM Ecole de l'énergie, Université de Lorraine

Bureau 016 Rouge

LEMTA Laboratoire des Energies et de la Mécanique Théorique et Appliquée

Cours n° 4 bis

Equation de la mécanique des fluides pour les écoulements multiphasiques avec changement de phase

I.4 Cas vectoriel

On passe par les composantes et $\vec{A} = \iint_{V(t)} \vec{a} dv$

forme bilinéaire.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \iint_{V(t)} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} dv + \oint_{\partial V(t)} \vec{a} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

où $\vec{a} \otimes \vec{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{a} \otimes \vec{v}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{v} \cdot \vec{y})$$

que l'on peut noter avec une matrice

$$\vec{a} \otimes \vec{v} = a_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad [a_i v_j]$$

$$[\vec{a} \otimes \vec{v}]_{ij} = a_i v_j \quad [\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j] = \delta_{ij} \quad \begin{matrix} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix}$$

Démonstration.

$$\frac{dA_i}{dt} = \iint_{V(t)} \frac{\partial a_i}{\partial t} dv + \oint_{\partial V(t)} a_i \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

$$a_i \vec{v} \cdot \vec{n} = a_i v_j n_j = (a_i v_j) n_j = ([\vec{a} \otimes \vec{v}] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_i$$

cf Poly 1A

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{V} \iint_{V(t)} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} dv + \frac{1}{V} \oint_{\partial V(t)} \vec{a} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

$\downarrow V \rightarrow 0$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\vec{S}_{\text{tot}}$ $\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \text{div}(\vec{a} \otimes \vec{v})$ $\text{div}(\vec{a} \otimes \vec{v}) = (a_i v_j)_{,j} \vec{e}_i$

II Applications en monophasique

II.1 Conservation de Quantité de Mouvement (QDM)

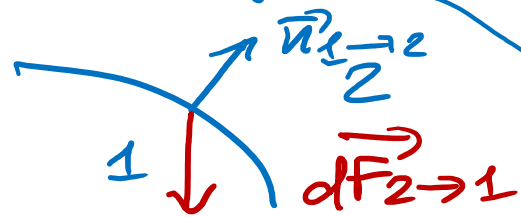
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad \text{PFD de Newton}$$

$$\vec{P}_A = \iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dv$$

Principe de Cauchy

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} &= \vec{F}_{ext}^{surf} + \vec{F}_{ext}^{vol} \\ &= \iint_{\partial V} d\vec{F}_{ext}^{surf} + \iiint_V \vec{f}_v dv \end{aligned}$$

$$d\vec{F}_{ext}^{surf} = \underbrace{\vec{\Pi} \cdot \vec{n}}_{\text{Tenseur des contraintes de Cauchy}} ds$$



$$d\vec{F}_{2 \to 1} = \vec{\Pi} \cdot \vec{n}_{1 \to 2} ds$$

$\vec{S}_{QDM} = \vec{f}_v$: densité volumique de force

$\vec{q}_{QDM} = \vec{\Pi}$ tenseur. $\text{div } \vec{\Pi} = \Pi_{ij,j} \vec{e}_i$ est un vecteur.

$$\boxed{\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div } \vec{\Pi} + \vec{f}_v}$$

II. 2 Théorème de l'énergie cinétique

Pour l'obtenir, on multiplie le PFD par $\vec{v}$ (6)

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v} \cdot \sum \vec{F}_{ext} + \underbrace{\vec{v} \cdot \sum \vec{F}_{int}}_{=0} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum \mathcal{P}_{ext} + \sum \mathcal{P}_{int}$$

$\vec{P} = m\vec{v}$ (6) mécanique du point $\rightarrow$ Système de point.

En mécanique des fluides, c'est pareil

$$\underbrace{\vec{v} \cdot \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v})}_{\text{couplage}} = \underbrace{\vec{v} \cdot \text{div} \vec{\Pi}}_{\uparrow} + \underbrace{\vec{f}_r \cdot \vec{v}}_{\text{puissance}} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{v} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

Energie cinétique massique $\frac{1}{2} v^2$

I.P.P.

$$\left(\underbrace{\text{div} \vec{\Pi}}_{\text{vecteur}} \right) \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{vecteur}} = \text{div} (\vec{\Pi} \cdot \vec{v}) - \underbrace{\vec{\Pi} : \nabla \vec{v}}_{\text{Euler}}$$

$$\text{div} (\vec{\Pi} \cdot \vec{v}) = \text{div} (\Pi_{ij} v_j \vec{e}_i) = (\Pi_{ij} v_j)_{,i} = \overbrace{\Pi_{ij,i} v_j}^{(\text{div} \vec{\Pi}) \cdot \vec{v}} + \underbrace{\Pi_{ij} v_{j,i}}_{\text{produit du tenseur de Cauchy}}$$

Euler

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \text{div}(\rho k \vec{v}) = \underbrace{\text{div}(\vec{\Pi} \cdot \vec{v})}_{\substack{\text{surf} \\ \mathcal{P} \text{ Extérieure}}} + \underbrace{\vec{\Pi} : \vec{\nabla} \vec{v}}_{\substack{\text{Int.} \\ \mathcal{P} \text{ Volumique}}} + \underbrace{\vec{f}_0 \cdot \vec{v}}_{\substack{\text{extérieure}}}$$

à $\vec{A} : \vec{B} = a_{ij} b_{ij}$ (produit scalaire entre tenseurs)

II. 3¹ Principe de la thermodynamique.

$$\underbrace{\text{1^{er}} PP}_{\substack{\text{PP} \\ \text{1^{er}}}} \frac{d}{dt}(U+K) = \mathcal{P}^{\text{ext}} + \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dU}{dt} = \dot{Q} - \mathcal{P}^{\text{int}}}$$

$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}^{\text{ext}} + \mathcal{P}^{\text{int}}$ énergie interne mécanique

$\downarrow$
 $\int_V \dot{q} dv + \int_{\partial V} \vec{q} \cdot \vec{n} ds$ vecteur densité de flux de chaleur

$$U = \iiint_{V(t)} \rho u dv$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho u dv = \iiint_V \rho \frac{Du}{Dt} dv$$

locale $\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = \dot{q} + \text{div} \vec{q} + \vec{\Pi} : \vec{\nabla} \vec{v}}$

II. 4 Bilan d'enthalpie.

$$h = U + PV \quad h = u + P \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{Du}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \dot{q} + \text{div} \vec{q} + \vec{\Pi} : \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D}{Dt}(\rho) = \frac{Du}{Dt} + \underbrace{P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)}_{-\frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}} + \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \text{div}(\vec{v}) \quad [\text{conservation de la masse}]$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \dot{q} + \text{div} \vec{q} + \vec{\Pi} : \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{DP}{Dt} + \underline{P \text{div}(\vec{v})}$$

$$\vec{\Pi} = -p \mathbb{1} + \vec{\sigma}$$

$$\vec{\Pi} : \vec{\nabla} \vec{v} = -p \underbrace{\mathbb{1} : \vec{\nabla} \vec{v}}_{\text{se coupe}} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{v} = -\underline{P \text{div}(\vec{v})} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{v}$$

$$\underbrace{\delta_{ij} v_{i,j}}_{v_{i,i}} = \text{div} \vec{v}$$

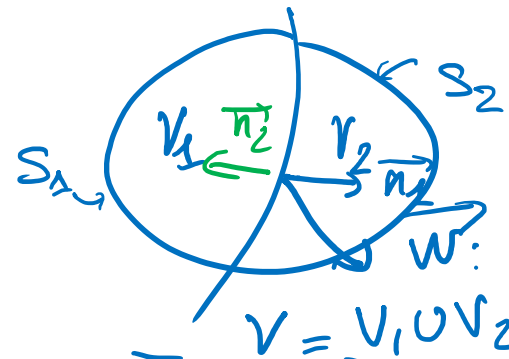
$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = \dot{q} + \underbrace{\text{div} \vec{q}}_{\text{surface}} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{v} + \underline{\underline{\frac{DP}{Dt}}}}$$

$\vec{q}$: vecteur densité de flux de chaleur.

... ou peut continuer... Température... entropie...

III Applications en multiphasique

III.1 Relation de saut



$$\partial V_1 = S_1 \cup \Sigma$$

$$\partial V_2 = S_2 \cup \Sigma$$

Σ : surface de discontinuité.
 $v = v_1 \cup v_2$
 w : vitesse de la discontinuité.

$\vec{w} \cdot \vec{n}_1 = w_n$ vitesse de la discontinuité.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_V = \left(\frac{d}{dt}\right)_{V_1} + \left(\frac{d}{dt}\right)_{V_2} : \text{extensive'}$$

$$A = \iiint_{V(t)} a dv$$

Bilan sur V_1 (tout est continu)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_1} a dv = \iiint_{V_1} \frac{\partial a}{\partial t} dv + \underbrace{\int_{S_1} a(\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) ds + \int_{\Sigma} a(\vec{w} \cdot \vec{n}_1) ds}_{\int_{\partial V_1} a(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_1} a dv = \iiint_{V_1} \frac{\partial a}{\partial t} dv + \oint_{\partial V_1} a(\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) ds$$

$$\vec{v}_1: \text{dans le volume 1} = \underbrace{\iiint_{V_1} \frac{\partial a}{\partial t} dv + \oint_{\partial V_1} a(\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) ds}_{\vec{v} \text{ est continu...}} + \underbrace{\int_{\Sigma} a[\vec{w} \cdot \vec{n}_1 - \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1] ds}_{\text{sauf saut}}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_1} a \, dv = \underbrace{\iiint_{V_1} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a \vec{v}) \right] dv}_{\text{volumique}} + \underbrace{\iint_{\Sigma} a_1 [\vec{w}_1 \cdot \vec{n}_1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1] ds}_{\text{surfaceique}}$$

Pour le volume.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_2} a \, dv = \iiint_{V_2} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a \vec{v}) \right] dv + \iint_{\Sigma} a_2 [\vec{w}_2 \cdot \vec{n}_2 - \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2] ds$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V a \, dv = \iiint_V \underbrace{\left[\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a \vec{v}) \right]}_{\text{volumique}} dv + \iint_{\Sigma} \underbrace{(a_1 [\vec{w}_1 \cdot \vec{n}_1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1] + a_2 [\vec{w}_2 \cdot \vec{n}_2 - \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2])}_{\text{surfaceique}} ds$$

Intégrale
 $\downarrow$
 $\frac{1}{V} \lim_{V \rightarrow 0}$
 locale

$$S_a^{\text{tot}} = \underbrace{\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}(a \vec{v})}_{\text{non commensurables}} + \underbrace{(a_1 [\vec{w}_1 \cdot \vec{n}_1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1] + a_2 [\vec{w}_2 \cdot \vec{n}_2 - \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2]) \delta_{\Sigma}}_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{sur} \\ \text{l'interface}}}$$

En l'absence de termes sources

dans le volume

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha \vec{v}) = 0$$

sur la discontinuité.

$$\left[\alpha [\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n}] \right] = 0$$

Equation aux discontinuités.

Equation de saut.

En général on peut écrire une flux, par exemple $\vec{n}_1 = \vec{n}$ et $\vec{n}_2 = -\vec{n}$

on note $\underbrace{[f]}_{\text{Saut de } f} = f_2 - f_1$

$$\left[\alpha (\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n}) \right] = 0$$

qui s'écrit avec un
vecteur de flux

En rajoutant les termes sources.

Si l'on se concentre sur les termes sources surfaciques

$$\oint_{\partial V} \vec{q}_a \cdot \vec{n} ds = \int_{S_1} \vec{q}_a \cdot \vec{n} ds + \int_{S_2} \vec{q}_a \cdot \vec{n} ds = \int_{\partial V_1} \vec{q}_a \cdot \vec{n} ds + \int_{\partial V_2} \vec{q}_a \cdot \vec{n} ds - \int_{\Sigma} \vec{q}_a \cdot \vec{n}_1 ds - \int_{\Sigma} \vec{q}_a \cdot \vec{n}_2 ds$$

$$\oint_{\partial V} \vec{q}_a \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div}(\vec{q}_a) dv - \int_{\Sigma} (\vec{q}_{a_1} \cdot \vec{n}_1 + \vec{q}_{a_2} \cdot \vec{n}_2) ds.$$

avec les termes selon les surfaces, on a donc

$$\boxed{\int \alpha (\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n}) + \vec{q}_a \cdot \vec{n} = 0}$$

III. 2 applications

* Masse $\alpha = \rho$ $\vec{q}_a = \vec{0}$ $\int \rho (\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$ $\int \vec{n} = 0$
 $\vec{u} = \rho (\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n})$ débit massique surfacique
 et tracer la discontinuité.

* quantité de mouvement (sans tension de surface).

$$\vec{a} = \rho \vec{v} \quad \vec{q}_a = \vec{\pi} \quad \int \rho \vec{v} (\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n}) + \vec{\pi} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$\int \vec{u} \vec{v} + \vec{\pi} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$\times$ Enthalpie $a = gh$ $\vec{q}_h = \vec{q}$ vecteur densité de flux de chaleur.

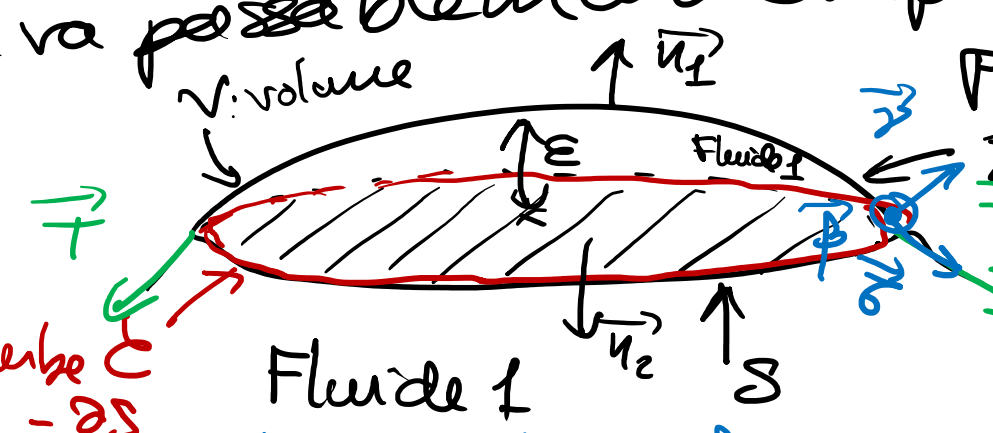
$$\Pi gh(\vec{w} \cdot \vec{n} - \vec{v} \cdot \vec{n}) + \vec{q} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Pi u h + \vec{q} \cdot \vec{n} = 0$$

 Changement d'état.

$$uL + \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

III. 3 Introduction de la tension de surface
 Ça va ~~poss~~ probablement compliquer les choses.

Statique $\vec{T}$ 

$\vec{T} = \gamma \vec{s}$
 $\vec{s}$: surface de l'interface entre le fluide 1 et le fluide 2.
 La tension de surface $\vec{T}$ cherche à minimiser la surface entre 1 et 2
 — plan (Percé) (sans Percé → sphère)

$$\underline{\Pi} g h (\underline{\vec{w}} \cdot \underline{\vec{n}} - \underline{\vec{v}} \cdot \underline{\vec{n}}) + \underline{\vec{q}} \cdot \underline{\vec{n}} \underline{\Pi} = 0$$

$$\| \ln h + \vec{q} \cdot \vec{u} \| = 0$$

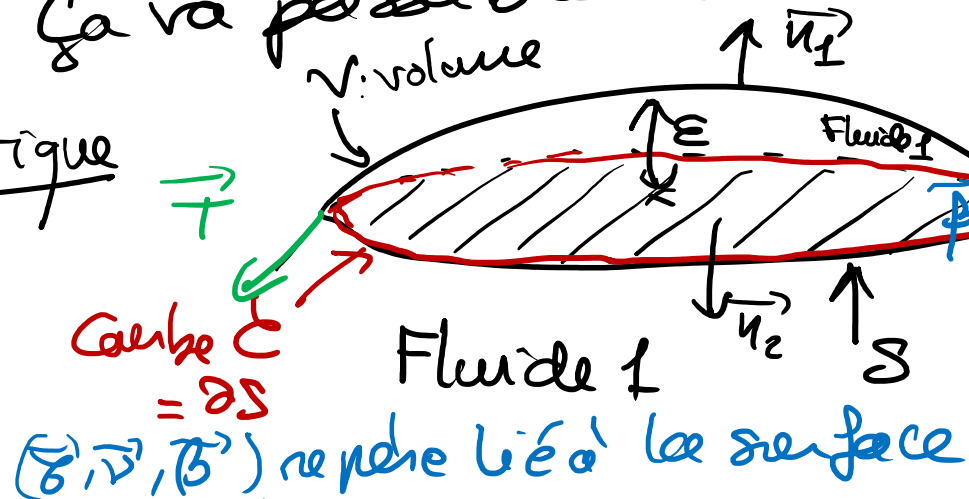
Changement d'état.

$$mL + \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

III. 3 Introduction de la tension de surface

ça va ~~poss~~ ^{peut-être} compliquer les choses

Statique



Fluid 2

Σ : surface à l'interface entre le fluide 1 et le fluide 2.

La tension de surface $\vec{T}$ cherche à minimiser la surface entre 1 et 2
 —> plan (Perc) (sans Perc $\rightarrow$ sphère)

Bilan de QOT

$$\iiint_V g \frac{D\vec{v}}{Dt} dv = \iiint_V \vec{F}_v dv + \iint_{\Sigma} \vec{\pi}_2 \cdot \vec{n}_2 ds + \iint_S \vec{\pi}_1 \cdot \vec{n}_1 ds + \int_C \vec{T} dp$$

A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$V \sim R^2 \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \propto R^2 \\ C \propto R \end{array} \right\} \rightarrow 0 \text{ mais doivent se compenser.}$$

$$\Sigma \rightarrow S \quad \vec{n}_2 \rightarrow -\vec{n}_1$$

$$\iint_S (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{\pi}_1 \cdot \vec{n}_1) ds = \int_C \vec{T} dp$$

Pour conclure, on a besoin d'un théorème de Stokes.

dp : petit incrément
de longueur le long
de la courbe

On introduit le gradient surfacique

$$\vec{\nabla}_s = \underbrace{[\mathbb{I}_d - \vec{n} \otimes \vec{n}]}_{\text{Projection sur la surface}} \cdot \vec{\nabla}_0 = \vec{\nabla}_0 - \vec{n} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial n}$$

Peut induire un écoulement
 $\Rightarrow$ Effet Marangoni

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma \vec{\delta} \, d\ell = \int_S [\vec{\nabla}_s \sigma - \sigma \vec{n} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})] \, ds$$

$$\int (\vec{\Pi}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{\Pi}_1 \cdot \vec{n}_1) \, ds = \int (\sigma \vec{n} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) - \vec{\nabla}_s \sigma) \, ds$$

La condition de saut de viscosité.

$$\vec{\Pi}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{\Pi}_1 \cdot \vec{n}_1 = \sigma \vec{n} \underbrace{\text{div}(\vec{n})}_{\text{Courbure de Gauss}} - \vec{\nabla}_s \sigma$$

gradient de tension de surface



QD 17 $\boxed{[\vec{\Pi}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{\Pi}_1 \cdot \vec{n}_1] = \sigma \vec{n} \mathcal{C} - \vec{\nabla}_s \sigma}$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \mathcal{C} = \text{div}(\vec{n})$$

Continuité des contraintes normales. (projet sur $\vec{n}$)

$$\llbracket \vec{v} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\pi} \cdot \vec{n} \rrbracket = \sigma \in \mathbb{C}$$

Continuité des contraintes tangentielles (projet sur $\vec{\sigma} \text{ ou } \vec{t}$)
un vecteur
tangent.

$$\llbracket \vec{t} \cdot \vec{\pi} \cdot \vec{n} \rrbracket = \vec{\nabla}_S \sigma \cdot \vec{t}$$