

Mécanique des Fluides Appliquée

E.N.S.E.M.
Ecole de l'énergie

A destination des apprentis et des élèves de la formation
générale

2019 - 2020

Nicolas Rimbert

1	Introduction.....	3
2	Statique des fluides	4
2.1	Rappel de Mécanique des Milieux Continus.....	4
2.2	Statique des fluides.....	7
3	Cinématique des fluides	13
3.1	Description Eulérienne et Lagrangienne	13
3.2	Dérivée particulaire	15
3.3	Equation d'Euler.....	16
3.4	Notion de circulation, de rotationnel	17
3.5	Equation du tourbillon.....	19
3.6	Relation de Bernoulli.....	20
4	Principe de conservation, effort sur un obstacle	22
4.1	Conservation de la masse	22
4.2	Conservation d'une grandeur vectorielle.....	23
4.3	Bilan local.....	24
4.4	Applications.....	24
4.5	Théorème de Reynolds (optionnel)	26
4.6	Compléments et applications.....	27
5	Viscosité.....	33
5.1	Notion de viscosité	33
5.2	Equation de Navier-Stokes	41
5.3	Transition Laminaire-Turbulent	45
6	Perte de charge.....	51
6.1	Introduction	51
6.2	Pertes de charge linéaires	55
6.3	Pertes de charge singulières.....	58
6.4	Circuits hydrauliques.....	61
7	Dimensions et Unités	66
7.1	Grandeur primitive	66
7.2	Grandeur dérivée	67
7.3	Changement de base et loi de transformation.....	69
7.4	Théorème Π de Vaschy-Buckingham	71
7.5	Applications.....	71
8	Bibliographie.....	75
8.1	Mécanique des fluides en français :.....	75
8.2	Compléments :.....	75
8.3	Remerciements	75

1 Introduction

Ce cours manuscrit correspond au cours de mécanique des fluides appliquées enseigné en première année de l'ENSEM en tronc commun. L'objectif de ce cours est composé de trois parties :

- Apprendre aux étudiants à faire des bilans (de masse, de quantité de mouvement et d'énergie mécanique) sur un système ouvert.
- Apprendre aux étudiants à calculer les efforts qui s'exercent sur un obstacle situé dans un écoulement.
- Apprendre aux étudiants à calculer les pertes de charges (i.e. d'énergie mécanique) dans un circuit hydraulique, à le dimensionner (choix d'une pompe) et à trouver son point de fonctionnement.

Il suppose que les élèves aient des connaissances minimales en mécanique du point évidemment mais également en mécanique des systèmes de points, des solides indéformables voire des systèmes de solides indéformables ; comme vous pourrez les trouver dans le cours manuscrit « *Rappels et compléments de mécanique générale* » que j'ai rédigé et placé sur Arche. Les notions importantes que vous pourrez y trouver et important pour le présent cours concernent le théorème de l'énergie cinétique pour les systèmes de points qui introduit pour la première fois la notion de puissance des efforts intérieurs (et qui n'existe pas, naturellement, en mécanique du point). Une autre notion importante concerne la notion des distributions des vitesses dans un solide indéformable (lié à la fameuse équiprojectivité des vitesses), qui conduit à la définition de vitesse de rotation instantanée des solides. Cette vitesse est en générale déterminée via le théorème du moment cinétique. La notion de moment d'une force, de description d'une force s'exerçant sur un solide par un vecteur lié i.e. un couple (vecteur force, point d'application) forme également une partie des connaissances nécessaires dès que l'on veut calculer les efforts qu'un fluide exerce sur un solide. Enfin ce cours intervient à la suite du cours de mécanique des milieux continus, donné à l'ENSEM par Cédric Laurent. Bien que certaines notions qui y sont développées seront reprises ici et détaillées dans le contexte fluide, un certain nombre de résultats qui y sont obtenus seront ici admis. Le plus important d'entre eux, concerne le caractère symétrique du tenseur des contraintes (et lié à la conservation du moment cinétique). J'encourage donc fortement les étudiants à aller revoir dans les *Rappels et compléments de mécanique générale* ou dans le cours manuscrit de MMC les notions sur lesquelles ils ont des incertitudes.

La mécanique des fluides peut posséder un côté assez mathématique (et il y avait, il n'y a pas si longtemps une option « mécanique » à l'agrégation de mathématiques). L'objectif du présent cours n'est pas de passer ces difficultés sous silence mais au contraire de donner une signification physique à tous les opérateurs mathématiques que l'on est susceptible de rencontrer dans la description du mouvement d'un fluide. L'approche développée ici est une approche que l'on pourrait qualifier d'anglo-saxonne ou d'« objet » dans le sens où les objets mathématiques (divergence et rotationnel principalement) sont présenté par leur propriété (c'est-à-dire par ce que l'on veut en faire ; mesurer des différences de flux entrée/sortie pour la divergence ; mesurer un taux de rotation infinitésimal pour le rotationnel), plutôt que par leur définition mathématique. A ce sujet et comme c'est l'usage dans les ouvrages imprimés, les vecteurs comme les matrices (tenseurs en fait) sont notés par des caractères gras. Ainsi le vecteur vitesse sera noté $\mathbf{v}$ et le tenseur des contraintes sera noté $\mathbf{T}$.

Enfin la partie bibliographie contient un certain nombre de conseil de lectures complémentaires.

2 Statique des fluides

2.1 Rappel de Mécanique des Milieux Continus

2.1.1 Volume Élémentaire Représentatif

En mécanique des milieux continus, la matière est découpée en petit volume élémentaire, grand devant les fluctuations microscopiques et petit devant les fluctuations macroscopiques.

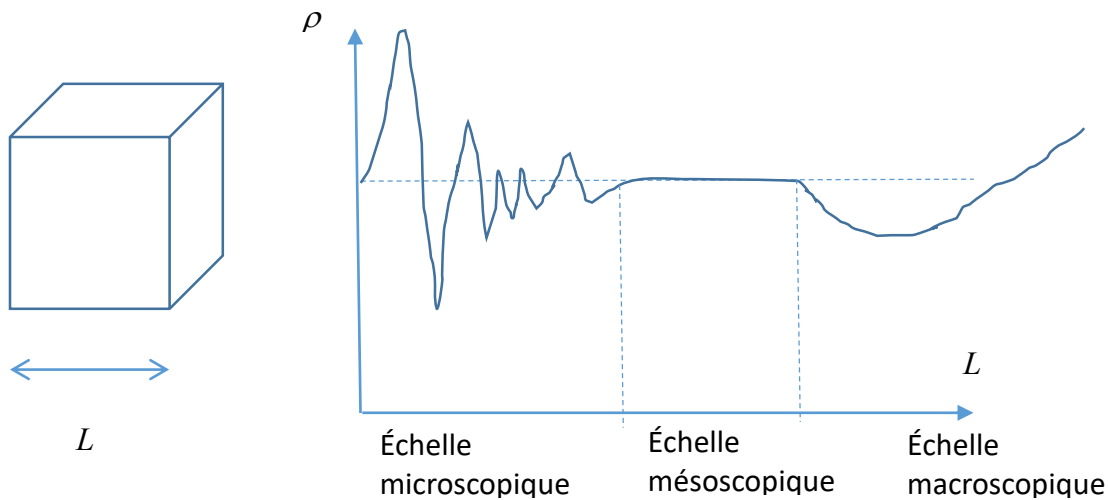


Figure 1: possibilité de définition d'une échelle intermédiaire ou "mésoscopique" qui permet de définir un Volume Élémentaire Représentatif

Cela définit l'échelle dite mésoscopique (i.e. intermédiaire) qui correspond donc à un ensemble de molécule qui permet la convergence statistique des grandeurs considérées mais pas suffisamment grand pour voir les variations macroscopiques (i.e. il n'y a pas de gradient à l'intérieur du V.E.R. et on peut faire une hypothèse d'équilibre thermodynamique local). On notera que l'on ne connaît pas bien la taille de ce V.E.R. mais on verra que ce n'est pas un réel inconvénient si l'on adjoint au deuxième principe de Newton (principe fondamental de la dynamique), la notion de conservation de la matière.

2.1.2 Représentation des contraintes

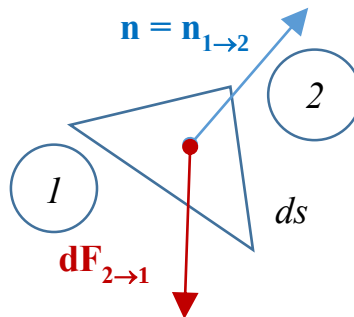


Figure 2: effort sur un petit élément de surface situé à l'intérieur d'un milieu fluide

Postulat de Cauchy :

On suppose que la force $d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ exercée sur une surface élémentaire $d\mathbf{s} = \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} ds$ ne dépend que de $d\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ (et pas de la forme de la surface). En supposant une dépendance linéaire on a donc

$$d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} ds \quad (0.1)$$

Où $\mathbf{T}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy.

Dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, ce tenseur s'écrit :

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

Soit en notation tensorielle :

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (0.3)$$

$$\mathbf{n} = n_j \mathbf{e}_j \quad (0.4)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_{ij} n_j \mathbf{e}_i \quad (0.5)$$

Vous avez pu voir dans votre cours de MMC que ce tenseur était symétrique.

Bilan des forces :

Soit un volume V de frontière ∂V , la force qui s'exerce sur le volume V due aux actions de contact s'écrit :

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds \quad (0.6)$$

Appliquons ceci à un petit cube de côté dx, dy et dz .

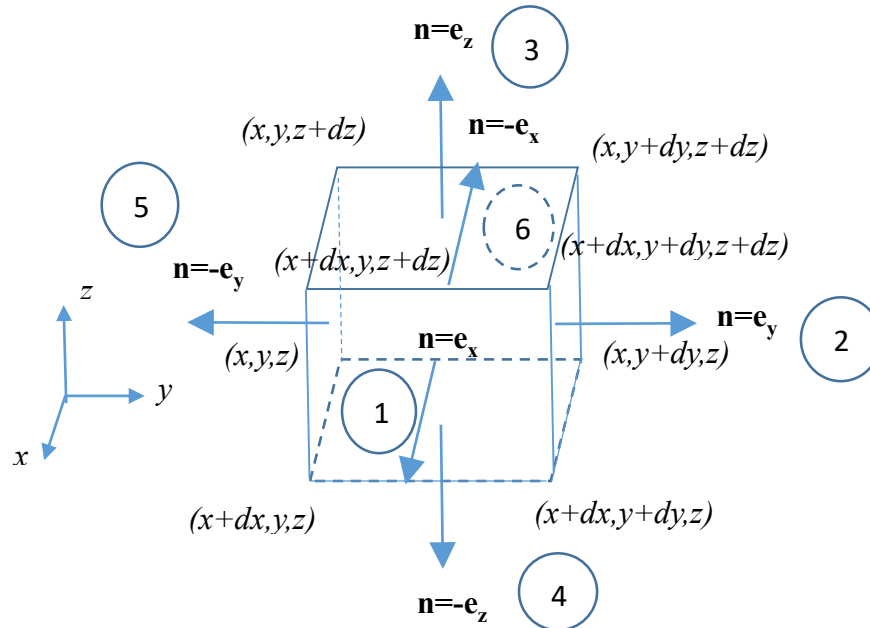


Figure 3: décomposition des faces d'un petit volume élémentaire cubique

On va calculer ceci en décomposant l'intégrale suivant :

$$\mathbf{F} = \iint_{(1)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{(2)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{(3)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{(4)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{(5)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{(6)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds \quad (0.7)$$

Et l'on va supposer que les contraintes sont constantes sur chacune de ces faces.

Sur le côté 1 on a :

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x, \quad ds = dydz, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_{xx}(x+dx)\mathbf{e}_x + T_{yx}(x+dx)\mathbf{e}_y + T_{zx}(x+dx)\mathbf{e}_z \quad (0.8)$$

Sur le côté 6 on a :

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x, \quad ds = dydz, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -T_{xx}(x)\mathbf{e}_x - T_{yx}(x)\mathbf{e}_y - T_{zx}(x)\mathbf{e}_z \quad (0.9)$$

Sur le côté 2 on a :

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_y, \quad ds = dxdz, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_{xy}(y+dy)\mathbf{e}_x + T_{yy}(y+dy)\mathbf{e}_y + T_{zy}(y+dy)\mathbf{e}_z \quad (0.10)$$

Sur le côté 5 on a :

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y, \quad ds = dxdz, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -T_{xy}(y)\mathbf{e}_x - T_{yy}(y)\mathbf{e}_y - T_{zy}(y)\mathbf{e}_z \quad (0.11)$$

Sur le côté 3 on a :

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z, \quad ds = dydx, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_{xz}(z+dz)\mathbf{e}_x + T_{yz}(z+dz)\mathbf{e}_y + T_{zz}(z+dz)\mathbf{e}_z \quad (0.12)$$

Sur le côté 4 on a :

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z, \quad ds = dydx, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -T_{xz}(z)\mathbf{e}_x - T_{yz}(z)\mathbf{e}_y - T_{zz}(z)\mathbf{e}_z \quad (0.13)$$

Ce qui donne en sommant sur les 6 surfaces et en divisant par le volume $V = dxdydz$ du cube, la densité volumique de force suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \mathbf{F} = \frac{1}{dxdydz} & \left(dydz \left[T_{xx}(x+dx)\mathbf{e}_x + T_{yx}(x+dx)\mathbf{e}_y + T_{zx}(x+dx)\mathbf{e}_z \right. \right. \\ & \left. \left. - T_{xx}(x)\mathbf{e}_x - T_{yx}(x)\mathbf{e}_y - T_{zx}(x)\mathbf{e}_z \right] \right. \\ & + dxdz \left[T_{xy}(y+dy)\mathbf{e}_x + T_{yy}(y+dy)\mathbf{e}_y + T_{zy}(y+dy)\mathbf{e}_z \right. \\ & \left. \left. - T_{xy}(y)\mathbf{e}_x - T_{yy}(y)\mathbf{e}_y - T_{zy}(y)\mathbf{e}_z \right] \right. \\ & + dxdy \left[T_{xz}(z+dz)\mathbf{e}_x + T_{yz}(z+dz)\mathbf{e}_y + T_{zz}(z+dz)\mathbf{e}_z \right. \\ & \left. \left. - T_{xz}(z)\mathbf{e}_x - T_{yz}(z)\mathbf{e}_y - T_{zz}(z)\mathbf{e}_z \right] \right) \end{aligned} \quad (0.14)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \mathbf{F} = & \left(\frac{T_{xx}(x+dx) - T_{xx}(x)}{dx} + \frac{T_{xy}(y+dy) - T_{xy}(y)}{dy} + \frac{T_{xz}(z+dz) - T_{xz}(z)}{dz} \right) \mathbf{e}_x \\ & + \left(\frac{T_{yx}(x+dx) - T_{yx}(x)}{dx} + \frac{T_{yy}(y+dy) - T_{yy}(y)}{dy} + \frac{T_{yz}(z+dz) - T_{yz}(z)}{dz} \right) \mathbf{e}_y \\ & + \left(\frac{T_{zx}(x+dx) - T_{zx}(x)}{dx} + \frac{T_{zy}(y+dy) - T_{zy}(y)}{dy} + \frac{T_{zz}(z+dz) - T_{zz}(z)}{dz} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (0.15)$$

En passant à la limite lorsque le volume du cube tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\mathbf{T}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \mathbf{F} = & \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x \\
 & + \left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y \\
 & + \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z
 \end{aligned} \quad (0.16)$$

Ce qui nous définit la divergence du tenseur des contraintes. Vous pouvez voir que c'est une expression assez longue qui comporte neuf termes. C'est pourquoi on lui préfère souvent les notations compactes suivantes :

$$\text{div}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1, j=1}^{i=3, j=3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = T_{ij,j} \mathbf{e}_i \quad (0.17)$$

Où l'on a utilisé la convention d'Einstein et noté la dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante par le symbole „ i “. On remarque que la relation inverse ou « théorème de la divergence » se comprend aisément à partir de (0.16).

2.2 Statique des fluides

2.2.1 Pression

L'expérience montre que dans un fluide au repos la force qui s'exerce sur une petite surface ne dépend pas de l'orientation de cette dernière. On appelle Pression la force par unité de surface ainsi définie.

$$P = \left\| \frac{d\mathbf{F}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}\| \quad (0.18)$$

Qui est donc indépendant de $\mathbf{n}$

Le tenseur des contraintes étant symétrique réel, il est diagonalisable. De la constatation expérimentale précédente, ces valeurs propres sont identiques et égales à la pression. On a donc :

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (0.19)$$

L'unité de la pression dans le système international d'unité est le Pascal. $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Pour rappel la pression atmosphérique moyenne est de 101325 Pa soit 1,01325 bar soit également 1 atm. (atmosphère). Vous verrez en TD qu'une atmosphère correspond à 760 mm de Mercure (Hg) ce qui définit le torr ($1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg} = 133,322 \text{ Pa}$.)

Remarque : on appelle déviateur d'un tenseur, le tenseur défini par

$$\text{dev}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I} \quad (0.20)$$

Pour un fluide immobile, le déviateur des contraintes est donc nul (ce qui ne sera plus vrai dans le cas pour un fluide en mouvement du fait de la viscosité). On fait cependant souvent l'approximation que c'est encore vrai pour un fluide en mouvement et on dit alors que le fluide est parfait.

2.2.2 Loi de la statique des fluides

Soit $\mathbf{f}_v$ la densité volumique de force autre que les forces de contact à laquelle est soumis un domaine fluide. Alors le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume de fluide immobile (principe fondamental de la statique) donne :

$$\oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iiint_V \mathbf{f}_v dv = 0 \quad (0.21)$$

Et l'on passe de cette forme intégrale à la forme locale en divisant par le volume V et en passant à la limite lorsque V tend vers 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{1}{V} \iiint_V \mathbf{f}_v dv &= 0 & \text{(forme intégrale)} \\ \downarrow V \rightarrow 0 & \quad \downarrow V \rightarrow 0 & \quad \downarrow V \rightarrow 0 \\ \text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f}_v &= 0 & \text{(forme locale)} \end{aligned} \quad (0.22)$$

Ce que l'on peut réécrire en utilisant (0.19) puisque

$$\text{div}(\mathbf{T}) = -\left(p\delta_{ij}\right)_{,j} \mathbf{e}_i = -p_{,j} \mathbf{e}_j = -\mathbf{grad}(p) \quad (0.23)$$

Si $\mathbf{f}_v$ est uniquement due au champ de pesanteur $\mathbf{f}_v = \rho \mathbf{g}$ et on a donc :

$$-\mathbf{grad}(p) + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (0.24)$$

Ce qui constitue l'équation de la statique des fluides.

Dans le cas général, si la force dérive d'un potentielle $\mathbf{f}_v = -\rho \mathbf{grad}(U)$, on obtient :

$$\mathbf{grad}(p) + \rho \mathbf{grad}(U) = 0 \quad (0.25)$$

Et on voit que les isobares et les iso-potentiels sont confondues.

2.2.3 Applications

2.2.3.1 Tonneau de Pascal (1646)

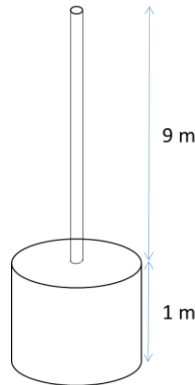


Figure 4: schéma de principe du tonneau de Pascal

Lorsqu'il a effectué cette expérience en 1646, Blaise Pascal a observé que lorsque l'on remplissait le tuyau situé au-dessus du tonneau représenté Figure 4, le tonneau finissait par percer et l'eau de se répandre. En utilisant la loi de la statique des fluides on peut comprendre aisément ce phénomène, une hauteur de 10m d'eau correspondant environ à une suppression de 1 bar (ou de 100 000 Pa) ce qui est suffisant pour rompre le tonneau et écarter ses planches. Notez que l'eau s'écoule ensuite si bien que l'on finit par transformer l'énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique. A la suite de cette expérience, on a pris l'habitude de noter l'énergie mécanique communiquée à un fluide en mètre d'eau. On reverra cette notion lorsque l'on parlera de la charge.

2.2.3.2 Paradoxe hydrostatique

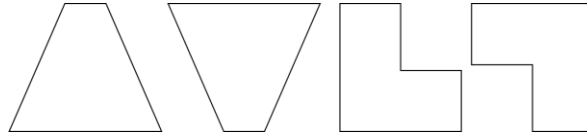


Figure 5: paradoxe hydrostatique

Le paradoxe hydrostatique est lié au fait, qu'en appliquant la loi fondamentale de la statique des fluides, la pression au fond d'un réservoir ne dépend pas de la forme de ces derniers. Ainsi pour les quatre réservoir représentés sur la Figure 5, la pression est-elle la même au point le plus bas du fond du réservoir.

2.2.3.3 Presse hydraulique

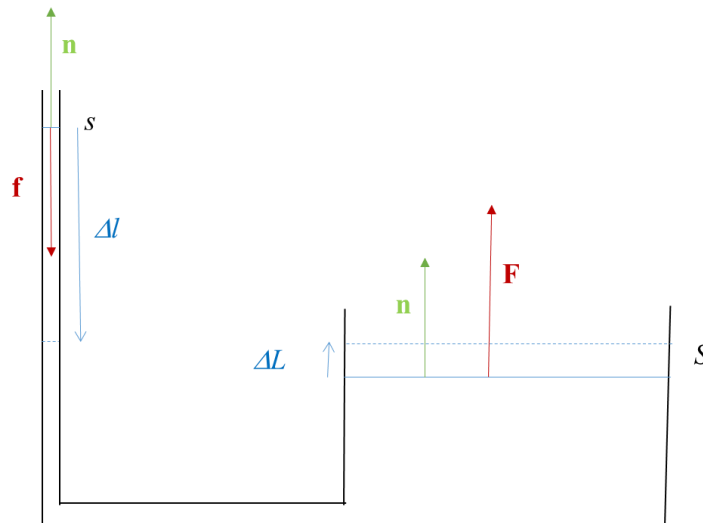


Figure 6: principe de fonctionnement d'une presse hydraulique

Si l'on applique le principe de la statique des fluides au volume de liquide situé sous les traits bleus continus sur la Figure 6, on obtient lorsque l'on n'applique pas de force :

$$\mathbf{R} + M\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (0.26)$$

Où $\mathbf{R}$ est la réaction du support et M la masse de liquide considérée. Lorsque l'on applique une force $\mathbf{f}$ du côté gauche, générant un déplacement de liquide Δl , cela génère un déplacement de liquide ΔL du côté droit et une force $\mathbf{F}$. le nouvel équilibre décrit :

$$\mathbf{R} + M\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (0.27)$$

Les forces sont liées à la pression dans le fluide par les relations :

$$\mathbf{f} = -sP\mathbf{n} \quad (0.28)$$

Et

$$\mathbf{F} = SP\mathbf{n} \quad (0.29)$$

Comme les altitudes sont en général proches (et que l'on pourrait très bien mettre le tuyau à l'horizontal sans changer le principe), on peut négliger la gravité et supposer que les pressions sont les mêmes de chaque côté. On en déduit :

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}\|} = \frac{S}{s} \quad (0.30)$$

Si bien qu'en générant une petite force du petit côté, on est capable de générer une grande force du grand côté. Ce principe est mis en application dans les presses hydrauliques (emboutissage).

2.2.3.4 Principe d'Archimède

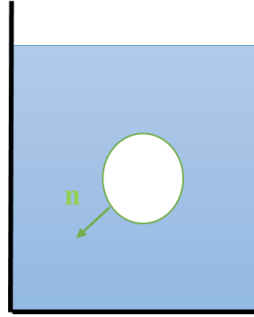


Figure 7: principe d'Archimède

« Tout corps immergé dans un fluide subit, de bas en haut, une force égale au poids du volume d'eau déplacé ».

Démonstration :

On a

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} -p \mathbf{n} ds \quad (0.31)$$

En appliquant le théorème de la divergence (qui provient directement de notre définition de la divergence).

$$\mathbf{F} = - \iiint_V \mathbf{div}(p \mathbf{I}) dv \quad (0.32)$$

On a déjà vu que cela se transformait en :

$$\mathbf{F} = - \iiint_V \mathbf{grad}(p) dv \quad (0.33)$$

Or par application du principe de la statique des fluides

$$\mathbf{grad}(p) = \rho_L \mathbf{g} \quad (0.34)$$

Ce qui signifie qu'à partir du moment où l'on applique le théorème de la divergence c'est comme si l'on remplissait virtuellement l'objet avec du liquide extérieur. On a donc

$$\mathbf{F} = -\rho_L \mathbf{g} \iiint_V dv \quad (0.35)$$

Et au final :

$$\mathbf{F} = -\rho_L V \mathbf{g} \quad (0.36)$$

c.q.f.d.

2.2.3.5 Loi du nivellement barométrique

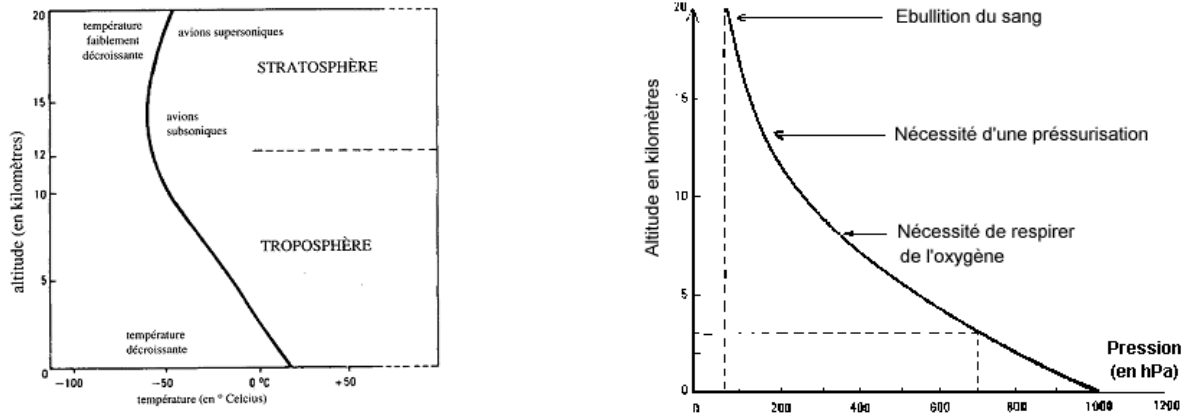


Figure 8: stratification en température et en pression de l'atmosphère (Source: <https://eduscol.education.fr>)

La stratification de l'atmosphère est un sujet complexe puisqu'elle varie en fonction de la météo, de l'alternance jour-nuit et du climat. Cependant on peut remarquer qu'en moyenne, on peut observer les profils de température et de pression donnés sur la Figure 8. On peut voir que la température varie un peu (on passe de 15°C à -50°C à 10 km d'altitude puis celle-ci se stabilise), la pression varie elle énormément (on passe de 101300 Pa, 30000 Pa à 10 km d'altitude et cette décroissance se poursuit). C'est ce qui explique la nécessité pour de nombreux alpinistes d'utiliser des bouteilles d'oxygène lorsqu'il veut s'attaquer à une ascension comme celle du Mont Everest dans l'Himalaya. On se propose de regarder ce qui se passe si l'on suppose l'atmosphère isotherme.

L'équation de la statique des fluides s'écrit :

$$\text{grad}(p) = \rho g \quad (0.37)$$

Ce qui donne par projection sur l'axe vertical (attention, ça n'a l'air de rien mais la gravité est ... vers le bas !...)

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (0.38)$$

Or on peut supposer que l'air obéisse à la loi des gaz parfaits, si bien que :

$$pV = nRT \quad (0.39)$$

Ou encore

$$p = \frac{n}{M} \frac{M}{V} RT = \rho \frac{R}{W} T = \rho r T \quad (0.40)$$

Où W est le poids moléculaire (éventuellement moyen dans le cas d'un mélange) du gaz. Si l'atmosphère est isotherme (ce qui ne constitue donc qu'une première approximation), on a donc :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{rT} p \quad (0.41)$$

Et donc par intégration :

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{rT}\right) \quad (0.42)$$

On a donc une décroissance exponentielle de la pression avec l'altitude.

2.2.3.6 Stabilité de l'atmosphère

Une atmosphère ne sera stable que si une parcelle d'air poussée à une autre altitude a tendance à revenir à son altitude initiale. La force de rappel est la différence entre le poids de la parcelle et la force d'Archimède liée au nouvel environnement qui l'entoure. Ainsi si la particule en montant

rencontre des particules plus lourdes qu'elle, elle continuera son ascension tandis que lorsqu'elle arrive à un endroit où les particules sont plus légères, elle ne peut plus continuer son ascension.

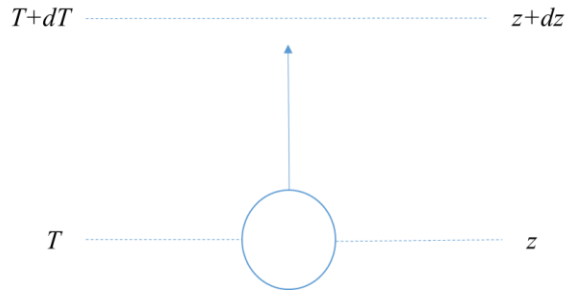


Figure 9: montée adiabatique d'une particule d'air dans l'atmosphère

On suppose que la particule d'air monte suffisamment vite pour qu'elle n'ait pas le temps d'échanger de la chaleur avec son environnement, elle subit donc une transformation adiabatique. En même temps on va supposer qu'elle monte suffisamment lentement pour qu'elle ait le temps d'équilibrer toutes les grandeurs thermodynamiques en son sein (T,P) , on a donc une succession d'évolution quasi-statique. Vous avez pu voir en cours de thermodynamique que ceci donne lieu à une transformation isentrope (adiabatique réversible). L'évolution de la particule est donc donnée par la loi de Laplace :

$$pV^\gamma = \text{cste} \quad (0.43)$$

Où $\gamma = C_p/C_v$. Dans notre cas cela donne :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad (0.44)$$

Ce que l'on peut écrire en utilisant la dérivée logarithmique :

$$\left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)_p = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} < 0 \quad (0.45)$$

Pendant ce temps-là, l'air ambiant est en équilibre à (T,P) à la nouvelle altitude, on dérive donc (logarithmiquement) la loi des gaz parfait donné par la relation (0.40). Cela donne :

$$\left(\frac{d\rho}{\rho} \right)_{\text{ambient}} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} < 0 \quad (0.46)$$

Pour que la particule d'air retombe, il faut qu'elle soit plus lourde que l'air ambiant (il faut donc que sa diminution de densité soit plus faible que pour l'air ambiant), ce qui conduit à :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} > \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \quad (0.47)$$

Soit :

$$\frac{dT}{T} > \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (0.48)$$

Or

$$dp = -\rho g dz \quad (0.49)$$

D'où

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho g T}{p} \quad (0.50)$$

Application numérique : $P = 10^5 \text{ Pa}$, $T = 273\text{K}$, $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ et $\gamma = 1.4$ alors $dT/dz > -0,975 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/m}$. En moyenne, on est entre $-0,7$ et $-0,5 \text{ }^\circ\text{C/100m}$ ce qui génère une atmosphère stable. Bien sûr cela change en cas de pluie (un front froid rencontre un front chaud changeant la stratification) !

3 Cinématique des fluides

3.1 Description Eulérienne et Lagrangienne

3.1.1 Mouvement de système matériel

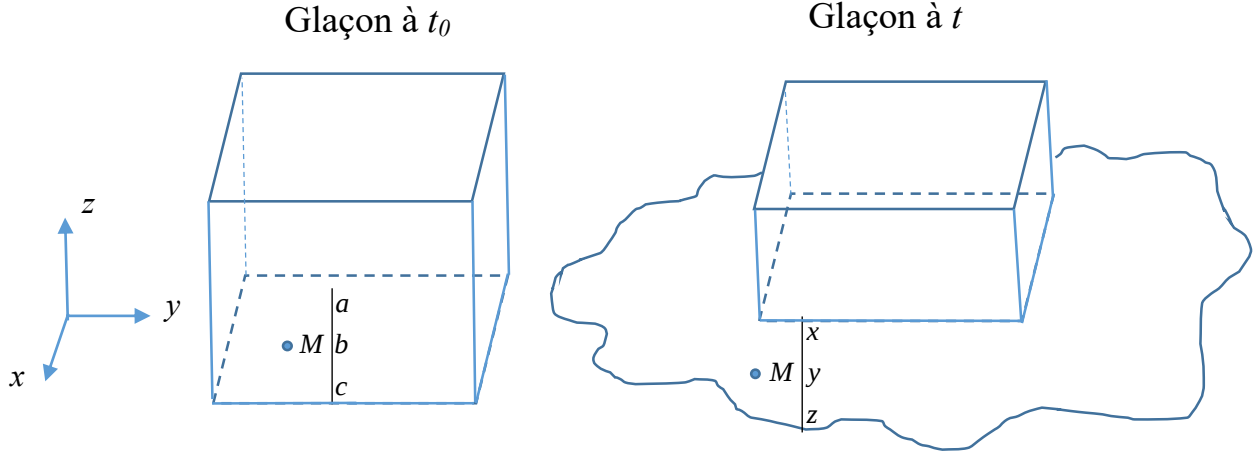


Figure 10: exemple de mouvement d'un système matériel: la fonte d'un glaçon. Le point M a pour coordonnées (a, b, c) à l'instant t_0 et (x, y, z) à l'instant t . On peut utiliser les premières coordonnées pour identifier la particule, les secondes deviennent, bien sûr, une fonction du temps.

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) &\mapsto (x_t(a, b, c), y_t(a, b, c), z_t(a, b, c)) \end{aligned} \quad (0.51)$$

qui vérifie la règle de semi-groupe suivante :

$$\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Phi_s \quad (0.52)$$

On l'appelle parfois « flot ». L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x_t(a, b, c), y_t(a, b, c), z_t(a, b, c)) \end{aligned} \quad (0.53)$$

constitue la trajectoire de la particule $p = (a, b, c)$. On suppose qu'elle est continue et dérivable (au moins presque partout). La dérivée de cette application constitue bien entendu la vitesse de la particule (de la même façon, son accélération est définie à partir de la dérivée seconde)

D'un point pratique, le domaine matériel D (qui sera en général un domaine fluide mais ce n'est pas nécessaire) étant décomposé en petite particule fluide infinitésimale (de la taille d'un V.E.R.) « étiquetée » ou « immatriculée » (a, b, c) ¹, le triplet (a, b, c) prend le nom de coordonnées lagrangiennes. La position (x, y, z) d'une particule à l'instant t constitue ses coordonnées Eulériennes.

Le champ de vitesse du fluide à l'instant t est construit sur cette description Eulérienne, c'est l'application :

¹ Cela peut être les coordonnées à l'instant initial mais pas nécessairement.

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \mapsto \begin{cases} \frac{d}{dt} x_t(a,b,c) \text{ où } x_t(a,b,c) = x \\ \frac{d}{dt} y_t(a,b,c) \text{ où } y_t(a,b,c) = y \\ \frac{d}{dt} z_t(a,b,c) \text{ où } z_t(a,b,c) = z \end{cases} \quad (0.54)$$

C'est-à-dire que l'on regarde la vitesse de la particule fluide correspondant au point de l'espace considérée à l'instant t . Par commodité on note cette application :

$$\mathbf{v}_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \mapsto \begin{cases} v_x \\ v_y \\ v_z \end{cases} \quad (0.55)$$

3.1.2 Ligne de courant, tube de courant.

Les lignes de courant sont des courbes qui à l'instant t sont colinéaires au champ de vitesse. C'est-à-dire que si $d\mathbf{l}$ est un petit déplacement le long de cette courbe alors on a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / d\mathbf{l} = \lambda \mathbf{v} \quad (0.56)$$

Ce qui donne :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \lambda(t) \quad (0.57)$$

Attention en effet, la constante de proportionnalité dépend du temps et dans le cas général, les lignes de courant sont distinctes des trajectoires (cf. Exercice n°1 du TD n°2 et Figure 11). Cependant, dans le cas particulier des écoulements stationnaires, la dépendance au temps disparaît et les lignes de courant deviennent identiques aux trajectoires.

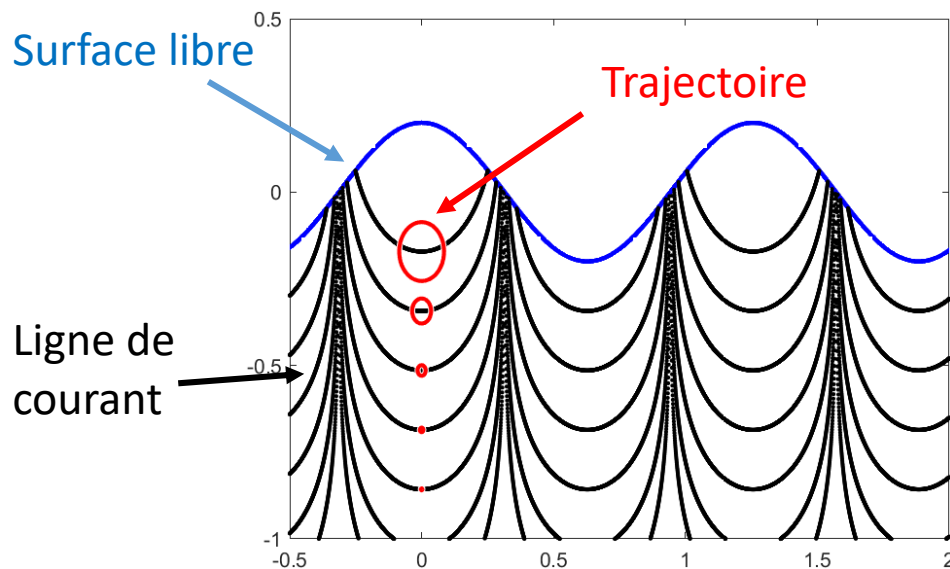


Figure 11: exemple le trajectoire et de ligne de courant lors de la progression de la houle. Dans ce processus instationnaire, les deux sont bien distincts

Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

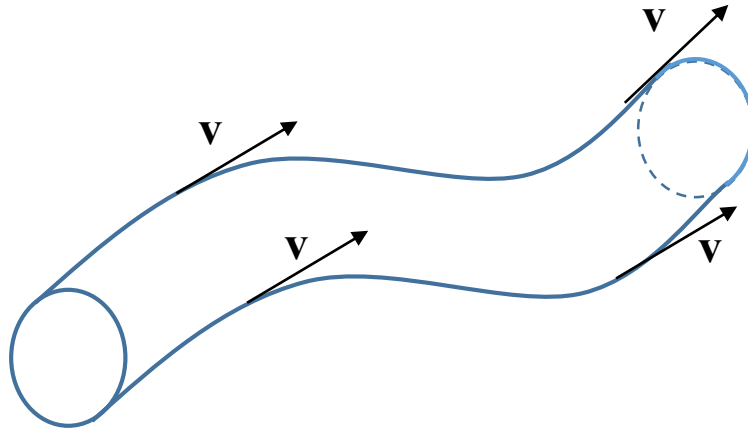


Figure 12: exemple se tube de courant

3.2 Dérivée particulaire

Il s'agit de répondre aux questions similaires suivantes :

Question n°1 : connaissant la cartographie du champ de vitesses de l'ensemble du fluide à tous les instants, peut-on en déduire l'accélération individuelle des particules ?

Question n°2 : comment relier les variations de vitesse en face d'une sonde à l'accélération des particules fluides ?

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t)) \end{aligned} \quad (0.58)$$

Alors une petite variationi de cette fonction s'écrit en utilisant sa différentielle :

$$d\mathbf{v} \left| \begin{aligned} dv_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt \\ dv_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz + \frac{\partial v_y}{\partial t} dt \\ dv_z &= \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{\partial v_z}{\partial t} dt \end{aligned} \right. \quad (0.59)$$

Maintenant fixons une particule $p = (a, b, c)$ et regardons la variations de la vitesse en contraignant le déplacement le long de la trajectoire, on a alors :

$$\begin{aligned}
(dv_x)_p &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_x}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt \\
(dv_y)_p &= \frac{\partial v_y}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_y}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_y}{\partial t} dt \\
(dv_z)_p &= \frac{\partial v_z}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_z}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_z}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)_p dt + \frac{\partial v_z}{\partial t} dt
\end{aligned} \tag{0.60}$$

Et au final :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dv_x}{dt} \right)_p &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\
\left(\frac{dv_y}{dt} \right)_p &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\
\left(\frac{dv_z}{dt} \right)_p &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}
\end{aligned} \tag{0.61}$$

Ce que l'on note :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_p = \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}}_{\text{effet de convection ou de mélange}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \tag{0.62}$$

dérivée particulaire
ou dérivée totale
variation de vitesse
en face de la sonde

3.3 Equation d'Euler

Pour une particule fluide de masse δm (V.E.R.) on a d'après le principe fondamental de la dynamique (P.F.D. ou seconde loi de Newton):

$$\delta m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_p = \sum \mathbf{F}_{ext} = \sum \mathbf{F}_{ext}^{surf} + \sum \mathbf{F}_{ext}^{vol} \tag{0.63}$$

En divisant par le volume δv du V.E.R., il vient :

$$\frac{\delta m}{\delta v} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_p = \frac{1}{\delta v} \sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{1}{\delta v} \sum \mathbf{F}_{ext}^{surf} + \frac{1}{\delta v} \sum \mathbf{F}_{ext}^{vol} \tag{0.64}$$

Ce qui en passant à la limite $\delta v \rightarrow 0$ donne pour un fluide parfait (cf. section 2.2)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} \tag{0.65}$$

En utilisant la dérivée totale ou convective, cela donne :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} \tag{0.66}$$

Ce qui constitue l'équation d'Euler. Cependant, elle n'est pas solvable pour l'instant. En effet, même en admettant que la densité du fluide est fixée, cette équation qui consiste en fait en 3 équations (Q.D.M. en x, y et z) comporte 4 inconnues (v_x, v_y, v_z, p). Et si la densité est variable (fluides compressibles vus en seconde année), cela fait 5 inconnues. D'autre part, comme en mécanique du point, elle nécessite une condition initiale. Cependant, comme elle comporte également des dérivées partielles (spatiales), elle nécessitera également des conditions aux limites du domaine de calcul (ou conditions aux limites).

3.4 Notion de circulation, de rotationnel

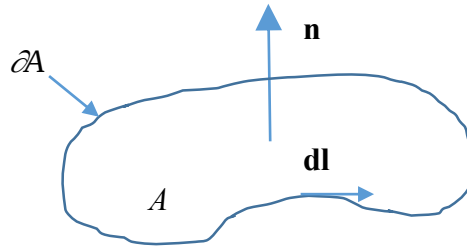


Figure 13: définition de la circulation d'un champ de vecteur autour d'un contour fermé

La circulation Γ d'un champ de vecteur $\mathbf{B}$ autour d'un contour fermé ∂A délimitant une surface A s'écrit :

$$\Gamma = \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (0.67)$$

De la même façon que l'on s'est intéressé au flux infinitésimal, on va s'intéresser à la circulation infinitésimale. On définit ainsi la composante suivant $\mathbf{n}$ du rotationnel de $\mathbf{B}$, la grandeur :

$$\text{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (0.68)$$

En fait on va simplifier le problème et s'intéresser à la circulation autour d'un circuit rectangulaire. En effet, on peut approcher n'importe quel circuit par une succession de circuits basés sur des schémas rectangulaires comme représenté sur la Figure 14.

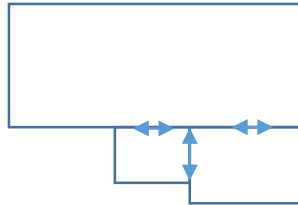


Figure 14: approximation d'un circuit par une succession de circuits rectangulaire. On remarque que les frontières intérieures se compensent deux à deux.

On va donc illustrer notre propos en considérant le circuit de la

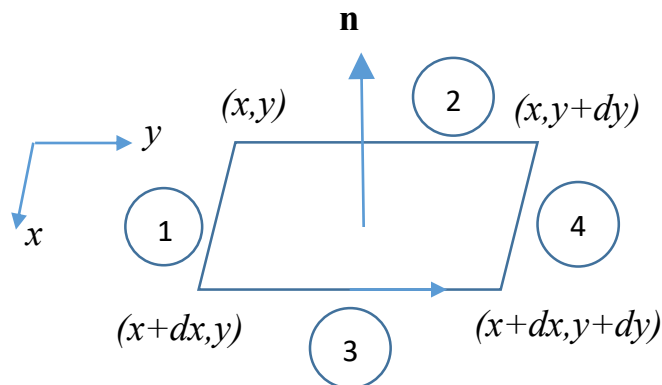


Figure 15: circulation autour d'un circuit infinitésimal rectangulaire

Pour calculer la circulation, on décompose l'intégrale en :

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(2)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(3)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(4)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (0.69)$$

Et l'on a sur chaque segment :

$$\text{sur (1), } \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y), d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x \text{ et } \frac{1}{A} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{dxdy} B_x(x, y) dx \quad (0.70)$$

$$\text{sur (2), } \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y), d\mathbf{l} = -dy\mathbf{e}_y \text{ et } \frac{1}{A} \int_{(2)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{dxdy} B_y(x, y) dy \quad (0.71)$$

$$\text{sur (3), } \mathbf{B} = \mathbf{B}(x + dx, y), d\mathbf{l} = dy\mathbf{e}_y \text{ et } \frac{1}{A} \int_{(3)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{dxdy} B_y(x + dx, y) dy \quad (0.72)$$

$$\text{sur (4), } \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y + dy), d\mathbf{l} = -dx\mathbf{e}_x \text{ et } \frac{1}{A} \int_{(4)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{dxdy} B_x(x, y + dy) dx \quad (0.73)$$

Ce qui donne en divisant par l'aire du circuit :

$$\frac{1}{A} \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{dxdy} (B_x(x, y) dx - B_x(x, y + dy) dx + B_y(x + dx, y) dy - B_y(x, y) dy) \quad (0.74)$$

Ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{1}{A} \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{B_x(x, y) - B_x(x, y + dy)}{dy} + \frac{B_y(x + dx, y) - B_y(x, y)}{dx} \quad (0.75)$$

Et en passant à la limite, on obtient la composante suivant z du rotationnel :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (0.76)$$

On obtient les autres composantes par permutation :

$$(x, y, z) \rightarrow (z, x, y) \text{ donne } \mathbf{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (0.77)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (y, z, x) \text{ donne } \mathbf{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (0.78)$$

On retrouve donc la formule classique :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (0.79)$$

Ce que l'on note également de façon indicielle par :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \varepsilon_{ijk} B_{k,j} \mathbf{e}_i \quad (0.80)$$

Où l'on a introduit le tenseur d'ordre 3, dit complètement antisymétrique ε , définit par :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i, j \text{ ou } k \text{ sont égaux} \\ 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (0.81)$$

Ce tenseur permet d'exprimer facilement le produit vectoriel puisque l'on a :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \quad (0.82)$$

Et via l'identité

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (0.83)$$

On peut montrer la relation bien connue

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (0.84)$$

En fait on verra plus tard que l'on peut montrer de nombreuses relations vectorielles en utilisant l'identité (0.83).

3.5 Equation du tourbillon

3.5.1 Vecteur tourbillon, définition

Le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}$ ou tourbillon est défini comme étant le rotationnel du champ de vitesse.

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u}) \quad (0.85)$$

Son interprétation physique est liée au comportement d'un incrément de vitesse dans l'écoulement et au tenseur du gradient des vitesses. Ce dernier s'écrit :

$$\mathbf{L} = \text{grad}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (0.86)$$

C'est-à-dire que sa matrice s'écrit $\begin{bmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}$ dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. On peut le décomposer classiquement en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

$$\mathbf{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)}_{\mathbf{S}: \text{partie symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)}_{\boldsymbol{\Omega}: \text{partie antisymétrique}} \quad (0.87)$$

La partie symétrique $\mathbf{S}$ de $\mathbf{L}$ s'appelle tenseur du gradient des vitesses de déformation (« Strain Rate Tensor »). Si l'on considère un incrément de vitesse entre deux points assez proche dans le fluide, on peut écrire :

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \approx \text{grad}(\mathbf{v}) \delta \mathbf{x} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \mathbf{e}_i \quad (0.88)$$

En décomposant le tenseur du gradient des vitesses on a :

$$\delta \mathbf{v} \approx \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x}}_{\text{déformation pure}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \wedge \delta \mathbf{x}}_{\text{rotation pure}} \quad (0.89)$$

En effet, vous avez vu en mécanique du solide indéformable (cf. compléments de mécanique si besoin), qu'à toute matrice antisymétrique $\mathbf{A}$ était associé un vecteur $\mathbf{a}$ tel que :

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{a} \begin{vmatrix} p \\ q \wedge \delta \mathbf{x} \\ r \end{vmatrix} \quad (0.90)$$

En mécanique du solide cela nous avait permis de définir le vecteur rotation instantanée du solide. Ici on vérifie :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (0.91)$$

Si bien que le fluide tourne à la vitesse angulaire $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$.

3.5.2 Equation d'évolution d'un tourbillon

Pour obtenir l'équation d'évolution du tourbillon, on a besoin d'un certain nombre de relation vectorielle. On les obtient en utilisant la relation (0.83).

3.5.2.1 Relations vectorielles utiles

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \mathbf{0} \quad (0.92)$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\mathbf{A})) = 0 \quad (0.93)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \text{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} \quad (0.94)$$

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = \text{grad}(f) \wedge \mathbf{A} + f \text{rot}(\mathbf{A}) \quad (0.95)$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{div}(\mathbf{B}) - \mathbf{B} \text{div}(\mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (0.96)$$

3.5.2.2 Dérivation

En partant de l'équation d'Euler (0.66) et en utilisant la relation (0.94), on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P) + \mathbf{F} \quad (0.97)$$

En prenant le rotationnel de cette équation, en intervertissant les dérivées et en utilisant (0.92), il vient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{0} - \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = -\text{rot}\left(\frac{1}{\rho} \nabla P\right) + \text{rot}(\mathbf{F}) \quad (0.98)$$

On conclut en utilisant les relations (0.95) et (0.96)

$$\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}}_{\text{Transport}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \text{div}(\mathbf{v})}_{\substack{\text{Basculement} \\ \text{Etirement}}} + \underbrace{\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \wedge \nabla P}_{\text{Terme Barocline}} + \underbrace{\mathbf{0} + \overrightarrow{\text{rot}}(\mathbf{F})}_{\substack{\text{nul si force} \\ \text{conservative}}} \quad (0.99)$$

On voit que c'est une équation relativement complexe à résoudre mais qui contient cependant beaucoup de physique : tourbillons ont une contribution non négligeable au mélange du fluide comme le montre le troisième terme de l'équation (0.97).

3.6 Relation de Bernoulli

Pour obtenir la relation de Bernoulli, on repart de l'équation d'Euler sous la forme (0.97). On va faire l'hypothèse d'un écoulement stationnaire i.e. d'un *régime permanent* (on peut également considérer le cas instationnaire, cf. les livres de référence donné en annexe). Considérons un petit déplacement $d\mathbf{l}$ dans le fluide, en multipliant scalairement (0.97) par $d\mathbf{l}$, il vient :

$$\text{grad}\left(\frac{1}{2} v^2\right) \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P) \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (0.100)$$

On va considérer le cas de forces conservatives (et en fait on ne considérera que le poids si bien que $\mathbf{F} = \mathbf{g}$) et d'écoulement à densité constante (*fluide parfait incompressible*), si bien que hormis le second terme, tous les termes peuvent se mettre sous forme de gradient. Il existe trois cas de figure qui permette de supprimer le second terme du membre de gauche : si $d\mathbf{l}$ est colinéaire à $\mathbf{v}$ (on se déplace alors sur une ligne de courant), si $d\mathbf{l}$ est colinéaire à $\boldsymbol{\omega}$ (on se déplace alors sur une ligne de tourbillon), ou si $\boldsymbol{\omega}$ est uniformément nul (on parle alors d'écoulement irrotationnel). Avec ces hypothèses l'équation (0.100) devient :

$$d\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0 \quad (0.101)$$

Si bien que la grandeur

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \quad (0.102)$$

est constante, soit le long d'une ligne de courant, soit le long d'une ligne de tourbillon, soit, si l'écoulement est irrotationnel, dans tout l'écoulement. L'unité de la charge est le m. Le choix de cette unité est historique (cf. tonneau de Pascal). On écrit aussi la conservation de la charge de la façon suivante :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{cste} \quad (0.103)$$

Cette équation représente la conservation de l'énergie pour un fluide incompressible en régime permanent (remarquez que l'équation (0.100) introduit bien le travail, par unité de volume, des efforts concernés).

On fera bien souvent l'hypothèse de conservation de la charge dans un écoulement, en général en faisant l'hypothèse que l'écoulement est irrotationnel ; ce qui permet à la charge d'être supposé constante dans tout l'écoulement. C'est une hypothèse forte, qui est bien souvent fausse, d'où le chapitre consacré aux pertes de charge. Comme la résolution de l'équation (0.99) ainsi que l'équation de Navier-Stokes qui la généralise pour les fluides visqueux est bien difficile, on fera appel à des méthodes semi-empirique pour les caractériser. Les écoulements irrotationnels sont, dans une certaine mesure, les pendants en mécanique des fluides des transformations irréversibles en thermodynamique : on les rencontre rarement dans la réalité mais ils sont fort commodes pour effectuer des calculs et prévoir des ordres de grandeur.

4 Principe de conservation, effort sur un obstacle

4.1 Conservation de la masse

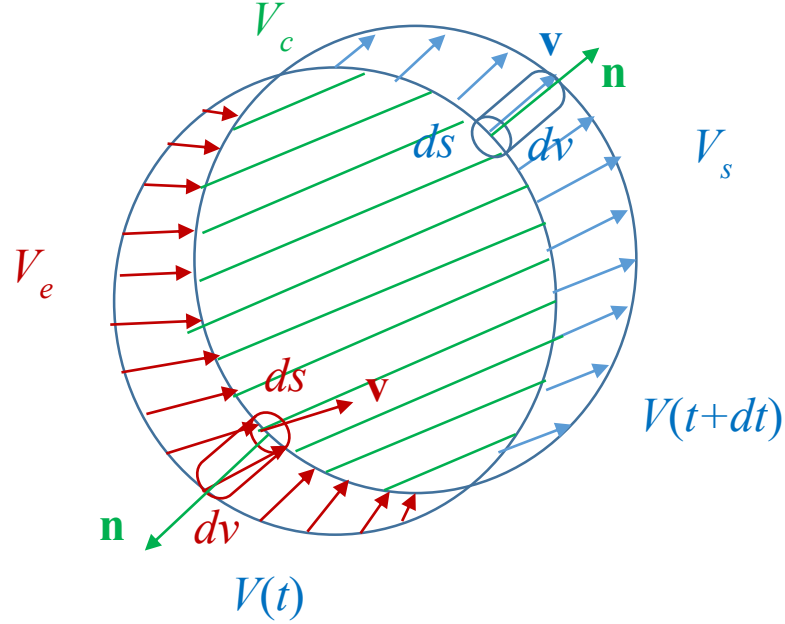


Figure 16: évolution d'un domaine matériel entre t et $t+dt$. Définition d'un volume de contrôle et des surfaces d'entrée et de sortie

On considère un mouvement de système matériel fluide situé à l'instant t dans le domaine $V(t)$. Ce domaine évolue au cours du temps et prenant deux instants très proche, on peut définir un volume de contrôle via la relation

$$V_c = V(t) \cap V(t+dt) \quad (0.104)$$

On peut aussi définir le volume du fluide qui rentre dans le volume de contrôle entre t et $t+dt$:

$$V_e = V(t) \setminus V_c \quad (0.105)$$

De la même façon on définit le volume de sortie :

$$V_s = V(t+dt) \setminus V_c \quad (0.106)$$

Ce que l'on peut également écrire :

$$V(t) = V_e \cup V_c \quad (0.107)$$

$$V(t+dt) = V_s \cup V_c \quad (0.108)$$

La masse du système fluide est

$$M(t) = \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (0.109)$$

Note : pour un scalaire a quelconque (désignant une grandeur volumique), on a :

$$A(t) = \iiint_{V(t)} a(\mathbf{x}, t) dv$$

La variation de masse entre t et $t+dt$, s'écrit :

$$dM(t) = M(t+dt) - M(t) = \iiint_{V(t+dt)=V_c \cup V_s} \rho(\mathbf{x}, t+dt) dv - \iiint_{V(t)=V_c \cup V_e} \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (0.110)$$

En découpant les intégrales en utilisant le volume de contrôle

$$dM(t) = \iiint_{V_c} \left[\underbrace{\rho(\mathbf{x}, t+dt) - \rho(\mathbf{x}, t)}_{\approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dt} \right] dv + \iiint_{V_s} \rho(\mathbf{x}, t+dt) \underbrace{dv}_{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds dt} - \iiint_{V_e} \rho(\mathbf{x}, t) \underbrace{dv}_{-(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds dt} \quad (0.111)$$

Si l'on utilise la relation $dv = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds dt$ sur le volume d'entrée, l'intégrale de volume devient une intégrale de surface sur la surface d'entrée (idem pour le volume et la surface de sortie mais le signe est opposé). Il vient donc :

$$dM(t) = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dv + \iint_{\Sigma_s} \rho(\mathbf{x}, t+dt) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds dt + \iint_{\Sigma_e} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds dt \quad (0.112)$$

Ce qui donne en passant à la limite $dt \rightarrow 0$:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint_{\Sigma_c} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv \quad (0.113)$$

Et comme il y a conservation de la masse, on a :

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint_{\Sigma_c} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv = 0 \quad (0.114)$$

Ce qui constitue la forme intégrale de la conservation de la masse.

Note : pour un scalaire, dans le cas général, on a :

$$\frac{dA(t)}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial a}{\partial t} dv + \oint_{\Sigma_c} a(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv = \text{Source de } a \quad (0.115)$$

Suivant la nature de la grandeur a , les sources de a peuvent être de type volumique (ex. chaleur de réaction) ou surfacique (ex. vecteur densité de flux de chaleur) mais hormis les sources de quantité de mouvement qui vont être détaillées par la suite, vous ne verrez pas ce type de source cette année.

4.2 Conservation d'une grandeur vectorielle

Si une grandeur est vectorielle et notée :

$$\mathbf{A}(t) = \iiint_{V(t)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv \quad (0.116)$$

On obtient alors

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dv + \oint_{\Sigma_c} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv = \iiint_{V_c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dv + \oint_{\Sigma_c} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dv \quad (0.117)$$

Où l'on a introduit le produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{v}$ défini par $\mathbf{a} \otimes \mathbf{v} = a_i v_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

Démonstration : En passant par les composantes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{a}$, on a :

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = \iiint_{V_c} \frac{\partial a_i}{\partial t} dv + \oiint_{\Sigma_c} a_i(\mathbf{x}, t)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv \quad (0.118)$$

Or

$$a_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = a_i v_j n_j = [a_i v_j] n_j = [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{e}_j \quad (0.119)$$

4.3 Bilan local

4.3.1 Cas scalaire

Pour passer au bilan local, on utilise toujours la même procédure, on divise par le volume du volume de contrôle et l'on fait tendre ce volume vers zéro.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_c} \frac{dA(t)}{dt} &= \frac{1}{V_c} \iiint_{V_c} \frac{\partial a}{\partial t} dv + \frac{1}{V_c} \oiint_{\Sigma_c} a(\mathbf{x}, t)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv \quad (\text{forme intégrale}) \\ \downarrow V \rightarrow 0 &\quad \downarrow V \rightarrow 0 \quad \downarrow V \rightarrow 0 \\ \text{div}(\mathbf{q}_a) + s_a &= \frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{a}\mathbf{v}) \quad (\text{forme locale}) \end{aligned} \quad (0.120)$$

Où les termes sources surfaciques ($\mathbf{q}_a$) et volumiques de a (s_a) ont été donnés par complétude mais nous n'en nous préoccupons pas cette année (ils ne sont donc pas détaillés).

4.3.2 Cas vectoriel

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_c} \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} &= \frac{1}{V_c} \iiint_{V_c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dv + \frac{1}{V_c} \oiint_{\Sigma_c} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dv \quad (\text{forme intégrale}) \\ \downarrow V \rightarrow 0 &\quad \downarrow V \rightarrow 0 \quad \downarrow V \rightarrow 0 \\ \text{div}(\mathbf{T}_a) + \mathbf{s}_a &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) \quad (\text{forme locale}) \end{aligned} \quad (0.121)$$

4.4 Applications

4.4.1 Masse

4.4.1.1 Forme générale

La forme intégrale de l'équation de conservation de la masse s'écrit, on l'a vu

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oiint_{\Sigma_c} \rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv = 0 \quad (0.122)$$

La forme locale correspondante devient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (0.123)$$

On remarque également que si l'on développe l'équation (0.123), il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \rho + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (0.124)$$

Si bien que l'on peut écrire la divergence de la vitesse comme :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\tau} \frac{D\tau}{Dt} \quad (0.125)$$

où $\tau = 1/\rho$ est le volume massique (ou spécifique). La divergence de la vitesse décrit bien la compressibilité du fluide. Si sa masse volumique ne change pas, on voit bien la divergence doit être nulle. Les écoulements de liquide sont en général incompressibles avec une très bonne approximation. Il en va autrement des écoulements de gaz. Cependant les écoulements compressibles seront au programme de la deuxième année et nous ferons quasi systématiquement l'hypothèse que les écoulements sont incompressibles (on ne l'a pas fait pour la stabilité de l'atmosphère par exemple)

4.4.1.2 Application à un tube de courant

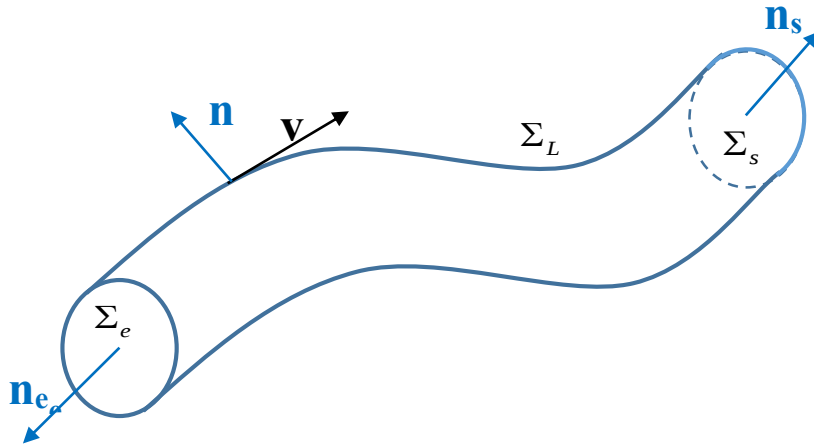


Figure 17: paramétrisation du tube de courant

Si on l'applique à un tube de courant, en régime permanent, elle devient :

$$\iint_{\Sigma_e} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv + \iint_{\Sigma_s} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv = 0 \quad (0.126)$$

Car $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0$ sur la surface latérale Σ_L . Et si l'on suppose que le profil de vitesse est uniforme sur la section d'entrée Σ_e et de sortie Σ_s , d'aire respectivement A_e et A_s , on peut écrire

$$-\rho_e v_e A_e + \rho_s v_s A_s = 0 \quad (0.127)$$

Ce qui sera fort pratique pour effectuer des calculs rapides (et ne sera pas si faux que ça, une fois que l'on aura introduit la notion de vitesse moyenne sur une section droite).

4.4.2 Quantité de mouvement (Q.D.M.)

4.4.2.1 Forme générale

La forme intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit en combinant (0.21) et (0.121) :

$$\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dv + \oiint_{\Sigma_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dv = \oiint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \iiint_V \mathbf{f}_v dv \quad (0.128)$$

Ce qui en passant à la forme locale donne

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f}_v \quad (0.129)$$

Dans le cas particulier d'un fluide parfait, on a $\mathbf{T} = -p \mathbf{I}$ ce qui conduit, si la seule force volumique est la gravité, à :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \text{div}(-p \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} = -\mathbf{grad}(p) + \rho \mathbf{g} \quad (0.130)$$

A priori c'est un peu inquiétant car l'équation (0.130) a l'air différente de l'équation (0.66). En fait on peut voir assez simplement qu'il n'en est rien. En effet en développant (0.130), et en utilisant l'équation de conservation de la masse (0.123), on obtient :

$$\cancel{\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \cancel{\mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v})} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}(p) + \rho \mathbf{g} \quad (0.131)$$

Ce qui redonne bien l'équation (0.66). Une généralisation de ceci donne naissance au théorème de Reynolds qui sera utile dans les années suivantes. La conservation de la Q.D.M. permet de calculer les efforts qui s'exercent sur un obstacle, c'est l'une des principales applications que l'on verra cette année.

4.4.2.2 Application à un tube de courant

Appliquons la forme intégrale à un tube de courant, il vient :

$$\iint_{\Sigma_e} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds + \iint_{\Sigma_s} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \iint_{\Sigma_e} -p \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{\Sigma_s} -p \cdot \mathbf{n} ds + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} -p \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathbf{F}: \text{effort sur les parois latérales du tube}} + M \mathbf{g} \quad (0.132)$$

En négligeant le poids (cf. exercice sur l'impact d'un jet), il vient

$$\iint_{\Sigma_e} [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \cdot \mathbf{n}] ds + \iint_{\Sigma_s} [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{F} \quad (0.133)$$

Dans le cas où les profils de pression, de densité et de vitesses peuvent être supposés constants sur une section droite, cette équation devient :

$$\rho_e A_e (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}_e) \mathbf{v}_e + p_e A_e \mathbf{n}_e + \rho_s A_s (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{v}_s + p_s A_s \mathbf{n}_s = \mathbf{F} \quad (0.134)$$

4.5 Théorème de Reynolds (optionnel)

Le théorème de Reynolds est une généralisation de « l'astuce » qui nous a permis de montrer l'équivalence des deux formulations de la Q.D.M. (équation (0.131)). Cela s'applique à toutes les grandeurs que l'on peut mettre sous la forme $\mathbf{a} = \rho \phi$ ou $\mathbf{a} = \rho \boldsymbol{\phi}$, c'est-à-dire que l'on peut définir des grandeurs massiques ou spécifiques. On a alors :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \phi dv = \iiint_{V(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt} dv \quad (0.135)$$

Démonstration :

On vient de voir que l'on a

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \phi dv = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi \mathbf{v}) dv \quad (0.136)$$

En développant :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \phi dv = \iiint_{V(t)} \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \cancel{\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \cancel{\phi \text{div}(\rho \mathbf{v})} + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \phi \right] dv \quad (0.137)$$

Le théorème de Reynolds sera particulièrement utile dans les années ultérieures (transport de l'enthalpie, de l'entropie, de la fraction massique de produits ou de réactifs dans les écoulements compressibles ou les réactions chimiques en milieux fluides).

4.6 Compléments et applications

4.6.1 Energie cinétique (optionnel)

On définit l'énergie cinétique du fluide par :

$$E_c = \iiint_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv \quad (0.138)$$

Pour obtenir le théorème de l'énergie cinétique, on procède comme en mécanique du point et du solide (cf. Rimbert, Compléments de mécanique) : on multiplie scalairement le P.F.D par le vecteur vitesse (i.e. on s'intéresse à la puissance instantanée)

$$\mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) \quad (0.139)$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) = \mathbf{v} \cdot (\text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f}_v) \quad (0.140)$$

En développant

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) + \underbrace{\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}_{\text{Flux d'énergie cinétique}} = \underbrace{\text{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v}}_{\text{Puissance des efforts de contacts}} + \underbrace{\mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v}}_{\text{Puissance des efforts de volume}} \quad (0.141)$$

On aime bien mettre les termes sous forme de divergence lorsque c'est possible (puisque cela traduit des échange interfaciaux au bord du domaine. On peut montrer que :

$$\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \stackrel{?}{=} \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \right) \quad (0.142)$$

Puis en effectuant une « intégration par partie », il vient :

$$\text{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \text{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \quad (0.143)$$

Où l'on a introduit le produit doublement contracté de deux tenseurs :

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = T_{ij} S_{ij} \quad (0.144)$$

On obtient le bilan d'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \right) = \text{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} \quad (0.145)$$

En introduisant l'énergie cinétique spécifique (ou massique) k , on peut également l'écrire sous la forme :

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \text{div}(\rho k \mathbf{v}) = \underbrace{\text{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})}_{P^{(ext)}} - \underbrace{\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v}}_{P^{(int)}} \quad (0.146)$$

Où l'on a distingué les puissances intérieures $P^{(int)}$ et les puissances extérieures $P^{(ext)}$ per unité de volume. Notez que le premier terme du terme de dissipation est négatif et constitue un terme de destruction de l'énergie cinétique du fluide. On verra lorsque l'on aura introduit la viscosité qu'il correspond à la dissipation de l'énergie cinétique.

4.6.2 Théorème de Cotton-Fortier (optionnel)

4.6.2.1 Forme générale

On peut réécrire l'équation (0.146) en rassemblant les termes de flux :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \text{div}((\rho k \mathbf{1} - \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}) = -\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} \quad (0.147)$$

Dans le cas d'un fluide parfait, on peut écrire le terme de dissipation sous la forme

$$-\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = p \delta_{ij} v_{i,j} = p v_{i,i} = p \text{div}(\mathbf{v}) \quad (0.148)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2\right) + \text{div}\left(\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{1} + p \mathbf{1}\right) \cdot \mathbf{v}\right) = p \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} \quad (0.149)$$

Si l'on suppose le fluide incompressible et que les forces volumiques dérivent d'un potentiel

$$\text{si } \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ et } \mathbf{f}_v = -\mathbf{grad}(E_p) \quad (0.150)$$

Alors on obtient la formule de Cotton-Fortier

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2\right) + \text{div}\left(\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p + E_p\right) \mathbf{v}\right) = 0 \text{ (forme locale)} \quad (0.151)$$

Ce qui s'écrit sous forme intégrale sous la forme :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2\right) dv + \oint_{\partial V} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p + E_p\right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \text{ (forme intégrale)} \quad (0.152)$$

4.6.2.2 Application à un tube de courant

Ce qui appliqué à un tube de courant, donne en régime permanent si l'énergie potentielle est la gravité et si les profils sont uniformes :

$$-A_e v_e \left(\frac{1}{2} \rho_e \mathbf{v}_e^2 + p_e + \rho g z_e\right) + A_s v_s \left(\frac{1}{2} \rho_s \mathbf{v}_s^2 + p_s + \rho g z_s\right) = 0 \quad (0.153)$$

Où z_e et z_s sont l'altitude de la fibre neutre du tube. Cela correspond à la conservation de la charge sur un tube de courant. En utilisant (0.127), on voit que l'on retrouve la relation de Bernoulli (car $\rho_e = \rho_s$ pour un fluide incompressible). Notez que l'on n'a pas supposé que l'écoulement est irrotationnel.

4.6.3 Applications

4.6.3.1 Théorème de Torricelli

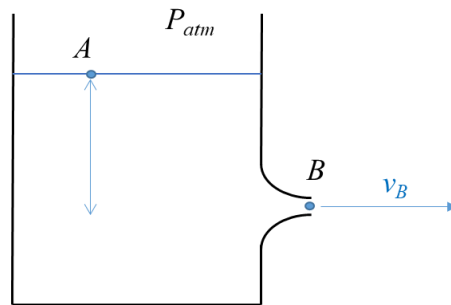


Figure 18: théorème de Torricelli

Par application de la relation de Bernoulli entre le point A et le point B, il vient :

$$\frac{1}{2} \rho_A \mathbf{v}_A^2 + p_A + \rho g z_A = \frac{1}{2} \rho_B \mathbf{v}_B^2 + p_B + \rho g z_B \quad (0.154)$$

Par application de la conservation du débit-masse, on a également :

$$\rho_A v_A S_A = \rho_B v_B S_B \quad (0.155)$$

Comme $\rho_A = \rho_B$ et que $S_A \gg S_B$, on peut négliger v_A devant v_B . D'autre part $p_A = p_B = p_{atm}$, si bien que l'on a au final :

$$v_B = \sqrt{2\rho g(z_A - z_B)} = \sqrt{2\rho gh} \quad (0.156)$$

C'est la formule de Torricelli.

4.6.3.2 Tube de Pitot

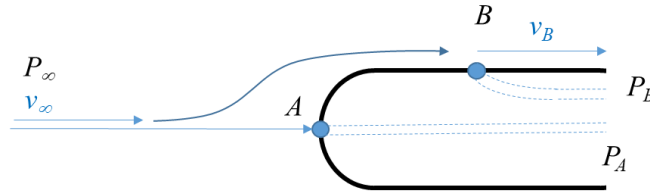


Figure 19: principe de fonctionnement d'un tube de Pitot

En appliquant la relation de Bernoulli entre le point amont situé à l'infini et le point d'arrêt A (un point d'arrêt est un point où la vitesse du fluide s'annule $v_A = 0$) ; il vient :

$$\frac{1}{2} \rho_A v_A^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 + p_\infty \quad (0.157)$$

On néglige l'effet de la gravité du fait de la faible différence d'altitude entre les deux points (vu que les vitesses mesurées ne sont pas faibles en général). De même entre le point situé à l'infini et le point B

$$\frac{1}{2} \rho_B v_B^2 + p_B = \frac{1}{2} \rho_\infty v_\infty^2 + p_\infty \quad (0.158)$$

On en déduit alors la vitesse au point B en fonction de la différence de pression entre les points A et B.

$$v_B = \sqrt{\frac{p_A - p_B}{2\rho}} \quad (0.159)$$

Cette technique de mesure de vitesse est appelée mesure de vitesse par tube de Pitot et possède de nombreuses applications en aéronautique.

4.6.3.3 Tube de Venturi

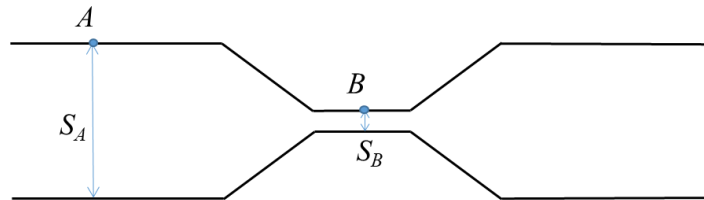


Figure 20: tube de Venturi

Le tube de Venturi utilise les mêmes principes ; on a toujours

$$\rho_A v_A S_A = \rho_B v_B S_B \quad (0.160)$$

et

$$\frac{1}{2} \rho_A v_A^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho_B v_B^2 + p_B \quad (0.161)$$

Il vient alors pour un fluide incompressible :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right] v_A^2 > 0 \quad (0.162)$$

Si bien que le point B est en dépression par rapport au point A. On se sert de cette propriété dans différents dispositifs technologiques : un canal est en général tracé entre un réservoir et le point B, le liquide contenu dans le réservoir est alors aspiré dans le Venturi. Voici quelques exemples :

- Diffuseur de parfum (à main par exemple)
- Pistolet à peinture
- Carburateur
- Trompe à eau en chimie, ou dispositif pour faire le vide (mise sous blister). Il n'y a pas alors de liquide dans le réservoir mais de l'air qui est aspiré.

Enfin en mesurant la différence de pression entre les points A et B, on peut en déduire le débit qui traverse la conduite, ce qui constitue un débitmètre élémentaire :

$$Q_v = S_B v_B = S_B \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho \left(1 - (S_B/S_A)^2 \right)}} \quad (0.163)$$

4.6.3.4 Méthode des volumes finis

L'intérêt des formulations bilans intégrale apparaît également lorsque l'on veut résoudre numériquement les équations de la mécanique des fluides². Pour ce faire on découpe le domaine fluide en un ensemble de volumes de contrôles appelé mailles et qui constitue un maillage (c.f. Figure 21).

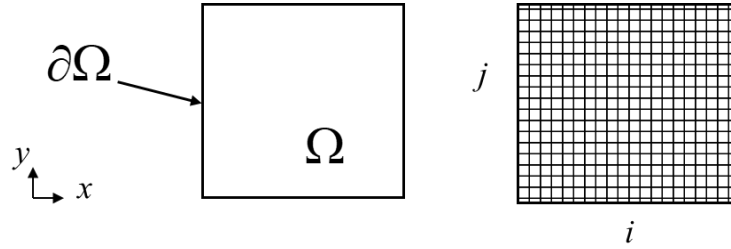


Figure 21: exemple de maillage 2D sur un domaine carré

On écrit en général, les lois de conservations sous forme de système en plaçant par exemple dans un vecteur inconnu $\mathbf{Y}$, la masse et la Q.D.M., par exemple en 2D :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \end{pmatrix} \quad (0.164)$$

On en déduit une équation d'évolution pour $\mathbf{Y}$ que l'on cherche à écrire sous forme conservative, c'est-à-dire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Y}(M, t) + \text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{Y}(M, t))) = 0 \quad (0.165)$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a :

² Pour rappel, il existe très peu de solutions analytiques à ces problèmes, même pour des géométries simples.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + P \\ \rho u_x u_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_y u_x \\ \rho u_y^2 + P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.166)$$

Ce qui correspond à la forme locale des lois de conservations. On passe à la forme intégrale via le théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} Y dv + \iiint_{\Omega} \text{div}(F(Y)) dv = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} Y dv + \iint_{\partial\Omega} F(Y) ds \quad (0.167)$$

Ce qui est valable pour tous les domaines de contrôle Ω existants. On peut donc prendre les mailles du maillage que l'on a défini comme domaine de contrôle, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_{ij}} Y dv + \iint_{\partial\Omega_{ij}} F(Y) ds = 0 \quad (0.168)$$

Où l'on a ordonné les mailles Ω_{ij} de la Figure 21 via un ordre lexicographique sur les indices (i,j) . En fait le problème de la numérotation du maillage est un problème en soi sur lequel on ne s'appesantira pas. On va désormais supposer que les mailles sont numérotées avec un seul indice et qu'elles ne sont pas nécessairement toutes de la même forme comme on peut le voir sur la Figure 22.

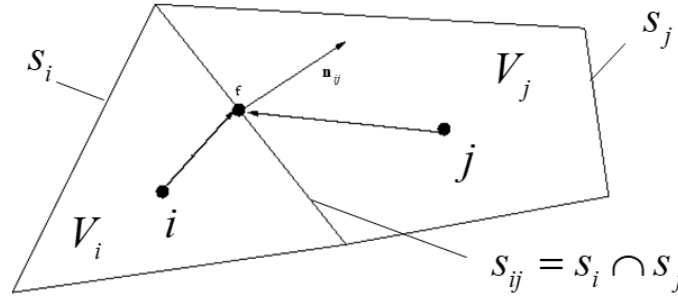


Figure 22: exemple de bilan entre deux mailles de formes différentes

On suppose ensuite que toutes les grandeurs d'intérêt sont uniformes sur chaque maille et l'on note $\bar{Y}_i$ cette valeur constante, on a alors l'équation d'évolution pour le contenu de la maille i via :

$$V_i \frac{\Delta \bar{Y}_i}{\Delta t} + \sum_j \bar{\mathbf{f}}(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j) s_{ij} = 0 \quad (0.169)$$

Où $\bar{\mathbf{f}}(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j)$ représente le (vecteur) du flux des grandeurs entre les mailles i et j à travers l'interface S_{ij} de surface s_{ij} . En résumé, on a remplacé des grandeurs continues par des grandeurs discrètes via la substitution :

$$\begin{aligned} Y(x_i, y_i) &\rightarrow \bar{Y}_i \\ F(Y(x_i, y_i)) &\rightarrow \bar{\mathbf{f}}(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j) \end{aligned} \quad (0.170)$$

Toute la difficulté de cette approche consiste à exprimer la valeur du flux à interface en fonction de la valeur des inconnues entre les deux faces. Mais ceci est une autre histoire (qui sera abordé dans les années ultérieures).

Pour illustrer le potentiel de cette méthode nous allons montrer les résultats qu'elle donne lorsqu'elle est appliquée à la mécanique d'une aile d'avion (ceci constitue par ailleurs un T.P. de 2A dont on ne délivre ici qu'une partie des enjeux).

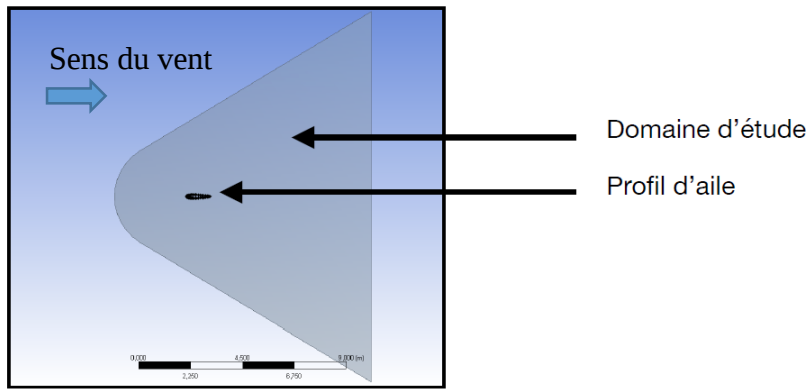


Figure 23 : domaine d'étude pour étudier la portance et la trainée d'une aile d'avion

Le domaine de calcul est représenté sur la Figure 23, tandis qu'un zoom sur le maillage est représenté sur la Figure 24. Les logiciels commerciaux gèrent en général de façon satisfaisante les maillages déformés et non uniformes voire présentant des mailles de forme différentes (on parle de maillages non structurés).

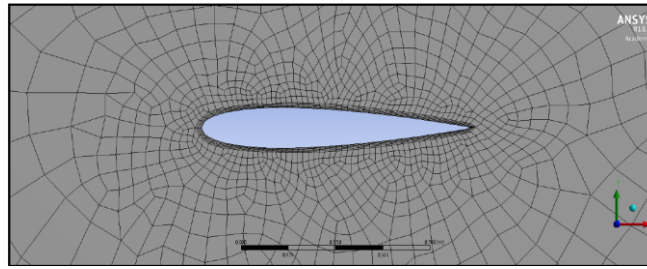


Figure 24: zoom sur le maillage au voisinage de l'aile. La nécessité de petites mailles pour résoudre ce que l'on appelle la couche limite sera abordé en seconde année.

La Figure 25 représente un certain nombre de résultats de calculs. Ce qui va être également l'occasion d'expliquer qualitativement le fonctionnement d'une aile d'avion en utilisant les notions que nous avons vu pour l'instant.

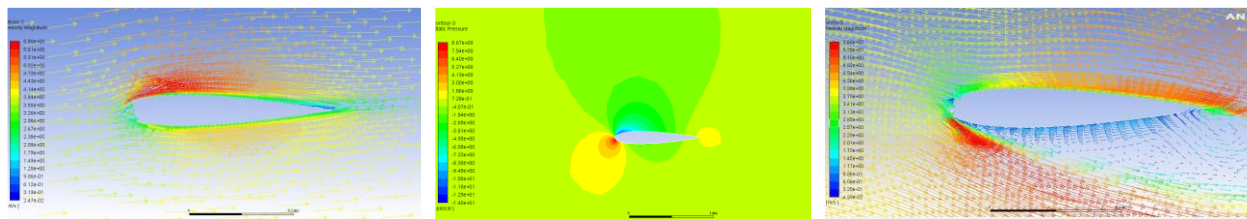


Figure 25: exemple de résultats de calcul pour un angle d'incidence de 5° (les deux résultats de gauche, champ de vitesse et champ de pression) et de 15° (à droite).

L'aile d'avion utilisée est symétrique si bien que si elle placée dans un écoulement sans incidence, l'écoulement sera exactement symétrique des deux côtés et qu'il ne peut y avoir de portance. Pour lui donner de la portance, il est donc nécessaire de lui donner un léger angle d'incidence. Par exemple les deux figures de gauche représentent le champ de vitesse et de pression pour un angle d'incidence de 5°. La légère dissymétrie fait que l'air a moins de place pour passer au-dessus (sur l'extrados) de l'aile ; par effet venturi il accélère légèrement plus que sur l'intrados créant une différence de pression (que l'on voit sur la figure du milieu) et donc une force ascensionnelle ou portance. Si l'angle est trop important, la séparation de l'écoulement dans le sillage peut détruire cet effet, c'est le décrochage que l'on peut voir sur la figure de droite.

5 Viscosité

5.1 Notion de viscosité

Pour l'instant les fluides que nous avons vus se comportent tous de la même façon. On dit que ce sont des fluides parfaits. Cependant l'expérience courante nous montre que de l'eau, de l'huile ou du miel ne se comporte pas tout à fait de la même façon. C'est donc qu'il manque quelque chose dans notre description. C'est ce que nous allons étudier maintenant. Tout d'abord en regardant ce qui manque à l'échelle moléculaire puis à l'échelle macroscopique. Ceci introduira la notion de viscosité (dont il existe deux formulations : dynamique et cinématique) et conduira à une correction importante de l'équation d'Euler donnant naissance à l'équation de Navier-Stokes.

5.1.1 Mise en évidence du phénomène d'entraînement visqueux

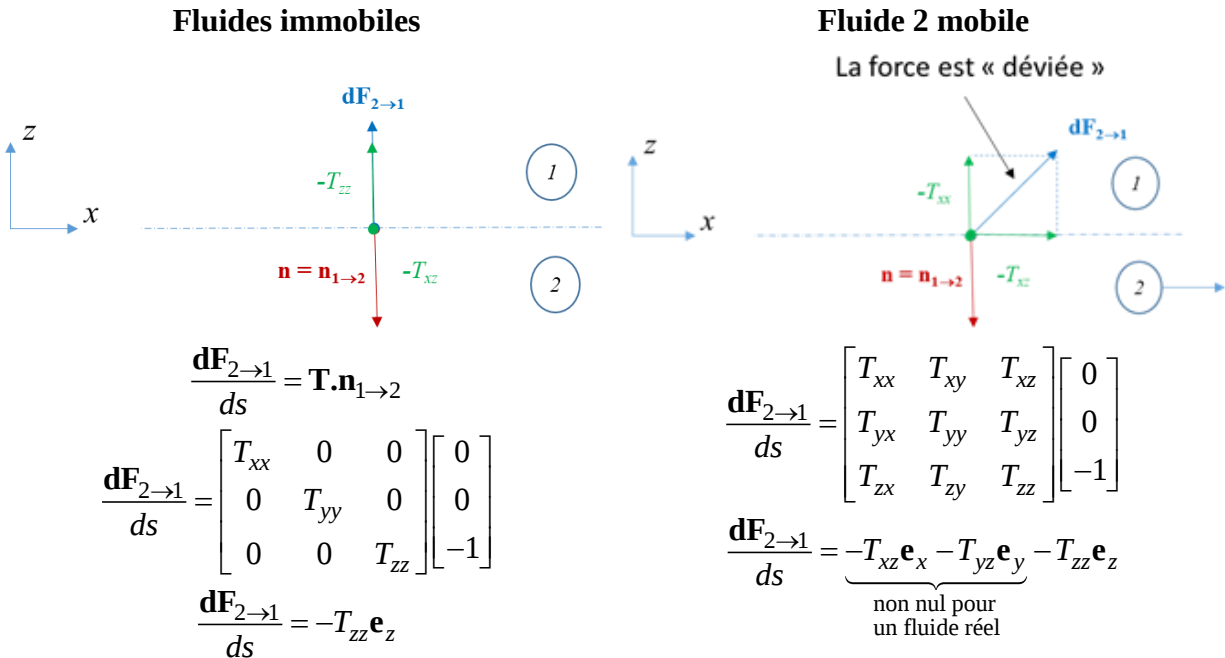


Figure 26: comparaison entre les efforts pour un fluide immobile et un fluide en mouvement

La Figure 26 montre la différence dans la répartition des efforts entre deux filets fluides, tout d'abord immobiles (à gauche) puis l'un des filets est mis en mouvement (à droite) ce qui provoque un entraînement mécanique du filet fluide situé au-dessus (un peu comme une personne que serait située sur un tapis que l'on tire). Pour rendre compte de cet effet on doit rajouter une composante T_{xz} à la force que le filet fluide 2 exerce sur le filet fluide 1. Il s'ensuit que le tenseur des contraintes de Cauchy ne peut plus être purement diagonal car seul cette composante non diagonale est susceptible de créer cet effort supplémentaire.

En régime permanent et établi on peut supposer que tous les filets fluides superposés les uns aux autres s'entraînent et que l'on a un profil de vitesse identique à celui décrit sur la Figure 27. On va donc pouvoir dans un premier temps écrire une relation fonctionnelle simple entre cet effort supplémentaire et ce gradient de vitesse uniforme.

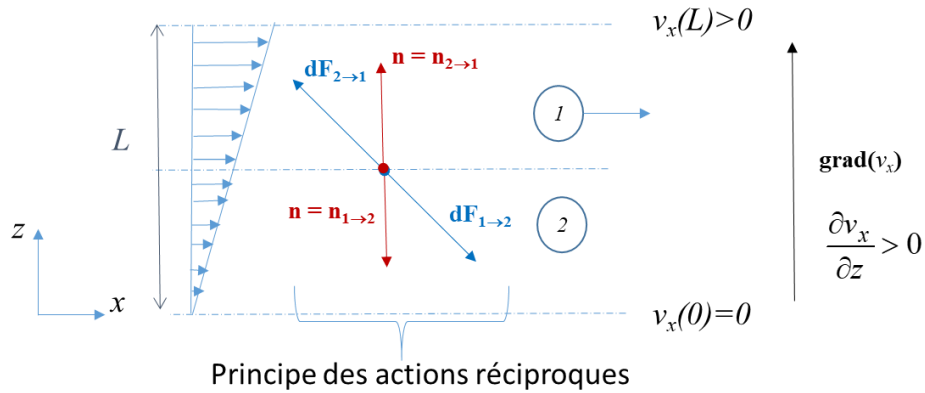


Figure 27: gradient de vitesse uniforme

Tout d'abord on peut remarquer que si $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ alors les vitesses sont uniformes, il n'y a pas d'entraînement et naturellement $T_{xz} = 0$. Dans le cas contraire T_{xz} doit être une fonction (voire une fonctionnelle i.e. dépendre de la fonction dans son ensemble par exemple de ces dérivées³). Dans un premier temps, pour simplifier, on peut supposer une dépendance linéaire ; il vient alors :

$$T_{xz} \approx \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (0.171)$$

Les fluides qui vérifient cette relation sont dits newtoniens. Ils sont très communs puisque l'air, l'eau, la plupart des huiles en font partie. Il forme donc une partie (très) importante de la mécanique des fluides. μ est appelée la viscosité dynamique du fluide. Sa dimension est :

$$[\mu] \equiv \left[\frac{\text{Force}}{\text{Surface}} \right] \text{Temps} \equiv \frac{MLT^{-2}}{L^2} T \equiv ML^{-1}T^{-1} \quad (0.172)$$

On en déduit que son unité dans le Système International d'unité (S.I.) est le $\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$ mais on lui préfère en général le Pa.s ou Poiseuille

$$1 \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} = 1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Poiseuille}$$

5.1.2 Origine de la viscosité des gaz

On va montrer dans cette section que les gaz se comportent en général comme des fluides newtoniens. Pour ce faire on va se fonder sur la théorie cinétique des gaz dont les prémices ont été vu en classe préparatoire.

5.1.2.1 Un peu de théorie cinétique des gaz

La théorie cinétique des gaz a été élaborée par James Clerk Maxwell et Ludwig Boltzmann (et quelques autres physiciens) au 19^{ème} siècle sur des idées de Daniel Bernoulli (18^{ème} siècle) alors que la théorie atomique de la matière n'était encore une hypothèse. Elle permet d'interpréter la température et la pression des gaz par leur agitation microscopique et leur collision avec une paroi. Une notion importante qui y figure est celle de libre parcours moyen entre deux collisions, noté l en général (c'est la distance moyenne entre deux collisions des molécules du gaz en question, pour l'air à 1013 hPa, il est de 68 nm). Une autre notion qui lui est reliée est celle de section efficace notée σ : sans entrer dans les détails, c'est la taille apparente des molécules qui gouverne leur possibilité de collision.

³ Cependant ceci nous entrainerait trop loin et sera réservé au cours de Rhéologie.

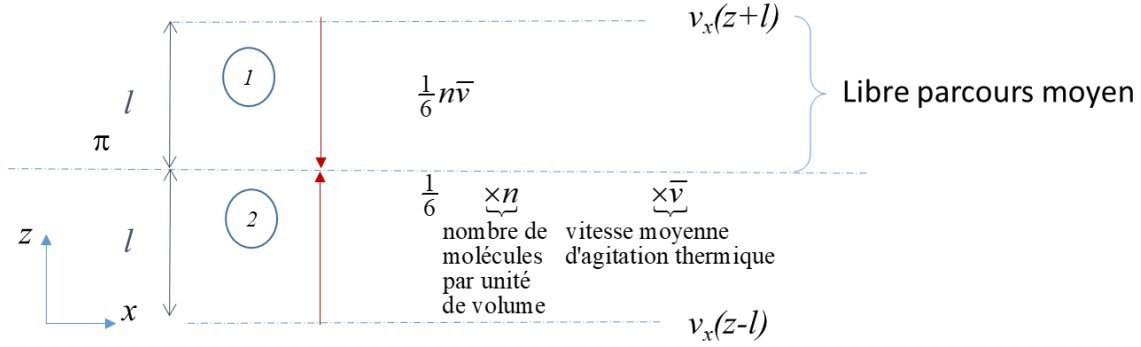


Figure 28: viscosité des gaz

A partir des considérations de la théorie cinétique des gaz (dont nous admettrons certains résultats), il est possible d'élaborer un modèle simple de la viscosité des gaz. En effet, l'agitation thermique du gaz a tendance à précipiter des molécules du gaz appartenant au filet fluide rapide vers le gaz lent et vice-versa. On pourrait imaginer cette comparaison en considérant que les filets fluides sont des trains parallèles les uns aux autres et que les molécules échangées seraient des sacs de sable échangés entre les wagons de deux trains contigus : le train rapide envoie des sacs ayant une forte quantité de mouvement qui accélère le train lent et le train lent envoie des sacs ayant une faible quantité de mouvement qui ralentit le train rapide. Cependant cette image est impropre car il n'y a pas réellement d'échange de molécules/sac de sables. En fait l'échange de quantité de mouvement se fait au moment des collisions entre les molécules. Collisions qui ont lieu en moyenne à une distance des filets fluides qui correspond au libre parcours moyen. Ce qui fixe, d'une certaine façon, la distance entre les deux voies ferrées. On arrive donc à la représentation illustrée sur la Figure 28, les deux filets fluides échangent leur quantité de mouvement à travers un plan horizontal π situé à l de chaque filet fluide. Les molécules issues de chaque filet peuvent aller dans 3 directions différentes du fait de leur agitation thermique mais seule la direction verticale (ce qui fait $1/3$) nous intéresse et encore, uniquement le sens de déplacement qui se dirige vers le plan (ce qui fait $1/2$). Au total l'agitation thermique ne précipite qu' $1/3 \times 1/2 = 1/6$ molécules à travers le plan π . Chaque molécule emporte la quantité de mouvement mv et comme il y a n molécules par unité de volume, le flux de quantité de mouvement horizontale (i.e. la contrainte⁴) qui traverse le plan π en descendant est :

$$\frac{1}{6} n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot v_x(z+l) \quad (0.173)$$

Tandis que le flux de quantité de mouvement horizontale qui traverse le plan π en montant est :

$$\frac{1}{6} n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot v_x(z-l) \quad (0.174)$$

La contrainte totale est la différence de ce flux de quantité de mouvement, soit :

$$\begin{aligned} T_{zx} &= \frac{1}{6} n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot v_x(z+l) - \frac{1}{6} n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot v_x(z-l) \\ &= \frac{1}{6} n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot \left[v_x(z+l) - v_x(z-l) \right] \end{aligned} \quad (0.175)$$

$\approx 2l \frac{\partial v_x}{\partial z}$

Où l'on a utilisé un développement de Taylor. On obtient bien une proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et le gradient vertical de vitesse horizontale (que l'on nomme le taux de cisaillement) :

⁴ Une force par unité de surface correspond bien à la variation de QDM par unité de temps et par unité de surface donc bien à un flux de QDM.

$$T_{zx} \simeq \frac{1}{3} n \cdot \bar{v} \cdot m \cdot l \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (0.176)$$

Ce qui permet d'identifier la viscosité dynamique qui s'écrit :

$$\mu = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot \bar{v} \cdot l \quad (0.177)$$

Cependant, d'un point de vue pratique on utilise très souvent le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique et l'on nomme cette nouvelle grandeur viscosité dynamique, usuellement notée ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot l \equiv \frac{L^2}{T} \equiv m^2 s^{-1} \quad (0.178)$$

Notez que l'unité de cette nouvelle grandeur (m^2/s) est très différentes de l'unité de la viscosité dynamique (Pa.s) et qu'elle résulte du produit d'une vitesse caractéristique (la vitesse d'agitation thermique) et d'une longueur caractéristique (le libre parcours moyen) ; propriété qui sera utilisée en seconde année lorsque l'on cherchera à modéliser les écoulements turbulents.

5.1.2.2 Evolution avec la température

La théorie cinétique des gaz nous indique que le libre parcours moyen est relié à la section efficace des molécules et à leur concentration via :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} \quad (0.179)$$

On va pouvoir utiliser ce résultat pour comprendre comment la viscosité d'un gaz évolue avec sa température. En effet en substituant (176) dans (174) il vient :

$$\mu = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \bar{v} \cdot \frac{m}{\sigma} \quad (0.180)$$

Qui est donc indépendant de la concentration en particules n et donc à température fixées de la pression⁵. D'autre part, on sait exprimer la vitesse moyenne d'agitation thermique en fonction de la température via le théorème d'équipartition de l'énergie, qui stipule que l'énergie moyenne par degré de liberté est la moitié du produit de la constante de Boltzmann et de la température, donc pour un degré de liberté de translation, on a :

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} kT \quad (0.181)$$

Comme on a trois degrés de liberté de translation de qui donne :

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \frac{3kT}{m} \quad (0.182)$$

Au final cela donne :

$$\mu = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3kT}{m}} \frac{m}{\sigma} \quad (0.183)$$

Et l'on a une variation générale de viscosité des gaz avec la température de la forme :

$$\mu_{gaz} \propto \sqrt{T} \quad (0.184)$$

5.1.2.3 Ordre de grandeur

Ce raisonnement permet également de déterminer un ordre de grandeur de la viscosité des gaz. Si l'on prend l'exemple important du diazote (qui correspond à 80% de l'air), on obtient ainsi :

⁵ C'est un résultat très important de la théorie cinétique : que la viscosité d'un gaz parfait est indépendante de sa pression.

$$m_{N_2} \simeq \frac{28}{6,02 \cdot 10^{23}} \simeq 4,7 \cdot 10^{-23} \text{ g} \quad (0.185)$$

Ce qui correspond à la masse d'une molécule de diazote. La QDM que lui communique l'agitation thermique est, elle, de :

$$m\bar{v} = \sqrt{3 \frac{m}{\text{kg}} \frac{k}{\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}} T} = 2,4 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (0.186)$$

On peut estimer la section efficace de collision à partir de la taille de la molécule, ce qui conduit à :

$$\sigma = \pi \left(\frac{d}{2 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \right)^2 = 1,25 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \quad (0.187)$$

On en déduit alors une valeur (approchée) de la viscosité dynamique :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma} = 450 \mu\text{P} \quad (0.188)$$

Ce qui est à comparer avec la valeur réelle de 178 μP . L'écart entre les deux provient vraisemblablement d'une valeur erronée de la section efficace de collision car on ne l'a construit que sur des considérations géométriques et il est fort probable que des interactions électrostatiques et ou électromagnétiques (type Van Der Waals) agissent avant que les molécules ne soient réellement en contact. On peut donc supposer que la valeur de σ a été sous-estimée.

5.1.2.4 Formule semi-empirique de Sutherland

Les résultats précédents ont été étendus par Sutherland en 1883 (en utilisant un potentiel d'interaction idéalisé entre les molécules), et il a obtenu une dépendance entre la viscosité μ à la température T et la viscosité μ_0 à la température de référence T_0 de la forme :

$$\mu = \mu_0 \frac{\sqrt{T} \frac{1+C/T_0}{\sqrt{T_0}}}{1+C/T} \quad (0.189)$$

Où C est une constante (fixée donc à $T_0 = 20^\circ\text{C}$) et qui vaut, en fonction des molécules considérées :

- H_2 : 79, NH_3 : 352, CO_2 : 277
- H_2O : 548, CH_4 : 144, N_2 : 109
- O_2 : 138, Air sec: 113

5.1.3 Origine de la viscosité des liquides

La théorie cinétique des liquides est beaucoup plus récente (et plus complexe) que la théorie cinétique des gaz. Principalement parce que toutes les molécules sont en contact les unes avec les autres, au moins dans leur voisinage immédiat. Il n'y a pas, à proprement parler de collision et l'on ne peut donc négliger les interactions à trois (voire plus) molécules. Néanmoins, en utilisant un cadre très simplifié, on peut cependant obtenir des résultats qualitatifs et semi-quantitatifs.

5.1.3.1 Un peu de théorie cinétique des liquides

Dans un liquide toutes les molécules sont en contact. On peut donc développer un modèle simple de piège : toutes les molécules peuvent bouger mais pour ce faire, il faut qu'elle brise leur liaison (en général du type Van Der Waals) avec leur voisine pour en reformer de nouvelles avec leurs nouvelles voisines. Ainsi si elles peuvent bouger, il y a un frein à leur mobilité. Ceci est représenté sur la Figure 29.

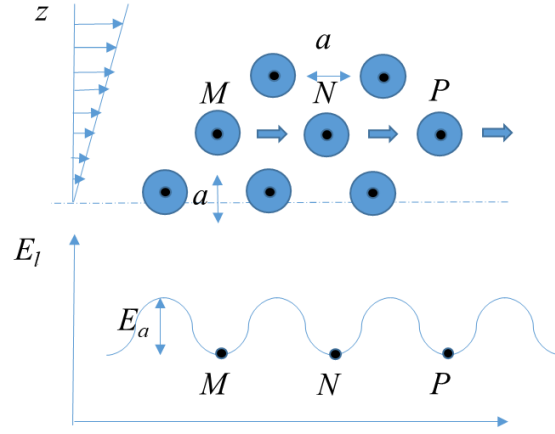


Figure 29: origine de la viscosité des liquides

En général, la hauteur de la barrière d'énergie potentielle qu'il faut traverser est de l'ordre du kJ/mol (pour les interactions de Van Der Waals standard) mais dans le cas de l'eau : $E_a^* \sim 10 \text{ kJ/mol}$. Pour décrire la probabilité de traverser la barrière de potentielle, on va utiliser la notion de facteur de Boltzmann. Ainsi pour une molécule située en N, la probabilité (par unité de temps) qu'elle ayant en P ou en M sans influence extérieur s'écrit :

$$\Pr\{N \rightarrow M \text{ ou } P\} = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right) \quad (0.190)$$

constante
de Planck

Sous l'effet des mouvements des particules situées au-dessus, cette probabilité se dissymétrise et l'on a vers la droite :

$$\Pr\{N \rightarrow P\} = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right) \exp\left(+\frac{\alpha}{kT} T_{zx}\right) = f^+ \quad (0.191)$$

≡ volume

Comme une contrainte (ou une pression) correspond à une densité d'énergie par unité de volume, le facteur α que l'on été amené à introduire doit être homogène à un volume pour que le facteur dans l'exponentiel soit sans dimension. Vers la gauche on a de façon symétrique :

$$\Pr\{N \rightarrow M\} = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right) \exp\left(-\frac{\alpha T_{zx}}{kT}\right) = f^- \quad (0.192)$$

Au final la vitesse induite par cette différence de probabilité s'écrit ;

$$\begin{aligned} v_N &= a(f^+ - f^-) \\ &= a \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{\alpha T_{zx}}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha T_{zx}}{kT}\right) \right] \end{aligned} \quad (0.193)$$

Où a est la distance moyenne entre les molécules. Or, en $0 \text{ sh}(x) \sim x$, on a donc :

$$\mu = \frac{T_{xz}}{\partial v_x / \partial z} \approx \frac{T_{xz}}{v_N / a} \approx \frac{2h}{\alpha} \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right) = \frac{2h}{\alpha} \exp\left(\frac{E_a^*}{RT}\right) \text{ car } N_A k = R \quad (0.194)$$

5.1.3.2 Evolution avec la température

On voit donc que si la température T d'un liquide augmente, sa viscosité diminue (cf. Miel/Pâte à tartiner). Il existe également des formules semi-empirique de la viscosité pour les liquides. Elles sont en général basées sur la formule d'Andrade

$$\frac{d \ln \mu}{dT} = \frac{-E_a^*}{RT^2} \quad (0.195)$$

Qui n'est pas sans rappeler la loi d'Arrhenius pour les réactions chimiques. Seul le signe change car si, en effet, une augmentation de 10 °C a tendance à multiplier par deux la cinétique des réactions chimiques, elle a tendance à diviser par deux la viscosité des liquides (attention, ce n'est qu'un ordre de grandeur). Comme l'énergie d'activation est liée à la cohésion du liquide, on peut également imaginer un lien avec la température d'ébullition, ce qui conduit à la formule semi-empirique suivante (en faisant l'hypothèse $E_a \sim kT_v$) :

$$\mu = \frac{h}{\frac{V_m}{N_A}} \exp\left(3,8 \frac{T_v}{T}\right) \quad (0.196)$$

$\frac{\text{volume}}{\text{molaire}} \quad \bigg/ \quad \frac{\text{nombre d'Avogadro}}$

5.1.3.3 Ordre de grandeur

De cette loi semi-empirique, on se propose d'estimer la viscosité (par exemple) du Benzène :

- $V_m : 86.10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}$
- $T_v : 353 \text{ K}$
- $N_A : 6,02. 10^{23}$
- $h : 6,6.10^{-34} \text{ J.s}$

On en déduit que $\mu = 4,5.10^{-4} \text{ Pa.s}$ ce qui se compare relativement bien avec la valeur réelle de $\mu = 6,5.10^{-4} \text{ Pa.s}$.

En fait, beaucoup de liquides ont une viscosité comparable, c'est pourquoi le mPa.s est une unité très utilisée. Voici quelques unités très utilisées pour décrire la viscosité des liquides :

$$1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Poiseuille (Pl)} = 10 \text{ Poise (P)} = 1000 \text{ centipoise (cP)}$$

Et pour l'eau :

$$\mu_{\text{eau}} = 0,891.10^{-3} \text{ Pa.s} \sim 0,9 \text{ cP} \sim 1 \text{ cP}$$

5.1.4 Mesure de viscosité

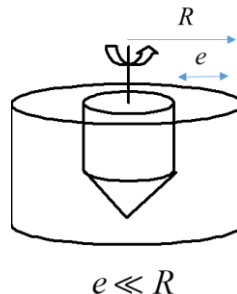


Figure 30: principe d'un viscosimètre de Couette

Il existe de nombreuses techniques pour mesurer la viscosité. Nous n'allons pas toutes les aborder ici. Disons cependant brièvement, que toutes les techniques utilisées dans l'industrie ne sont pas viscosimétriques (par exemple les viscosimètres à chute de bille, à mesure du temps de vidange d'un réservoir ou encore les viscosimètres fixés sur une perceuse). C'est-à-dire que ces

méthodes ne permettent pas de déterminer la loi de comportement réelle du fluide mais que si ce fluide est newtonien, alors peuvent être relativement précise. Nous allons ici présenter qualitativement l'un des plus anciens viscosimètres développés : le viscosimètre de Couette (1889). Il est constitué d'un cylindre fixe (appelé stator) en général situé à l'extérieur et d'un cylindre mobile (rotor) souvent intérieur. Pour effectuer une mesure, on fixe la vitesse de rotation et on mesure le couple résistant. En faisant varier la vitesse de rotation, on fait varier le taux de cisaillement :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Et l'on déduit du couple, la contrainte T_{xz} . On est alors en mesure de tracer la contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement, formant ce que l'on appelle un rhéogramme (cf. Figure 31).

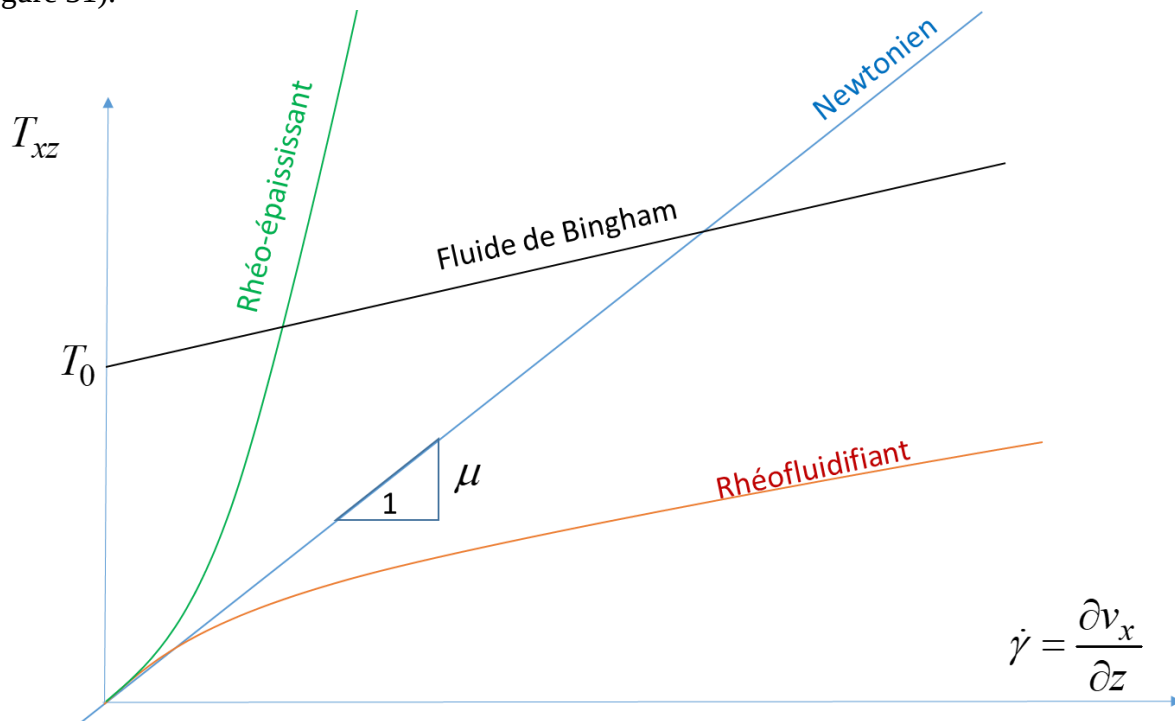


Figure 31: rhéogramme

Pour les fluides newtoniens, cette contrainte est proportionnelle au taux de cisaillement et l'on suit la courbe en bleu. Cependant, l'expérience montre que certains fluides se comportent différemment. Certains fluides, comme les peintures modernes par exemple, deviennent de plus en plus liquide lorsqu'on les agite et cisaille fortement puis redeviennent très visqueuse lorsqu'on les laisse reposer : de ce fait, elles ne coulent pas ou peu. Elles font partie des fluides rhéofluidifiants (courbe rouge). A contrario, la purée de pois a tendance à devenir de plus en plus épaisse lorsqu'on la touille. Elle fait partie des fluides rhéo-épaississants (courbe verte). Enfin d'autres fluides nécessitent une contrainte minimum avant de s'écouler (un peu comme le dentifrice qui n'arrive pas à sortir de son tube). Ce sont les fluides à seuil dont les fluides de Bingham sont un exemple (courbe noire). Pour caractériser correctement ces fluides dits complexes, il est nécessaire d'avoir un rhéomètre dont l'écoulement est dit viscosimétrique (c'est-à-dire que le taux de cisaillement est uniforme dans toute la géométrie). Ce qui est le cas du viscosimètre de Couette lorsque son entrefer (distance entre les deux cylindres) n'est pas trop grand. Enfin les fluides complexes se caractérisent par des effets mémoires (par exemple un yaourt touillé ne redevient pas solide une fois laissé à l'abandon) qui compliquent encore leur modélisation.

5.2 Equation de Navier-Stokes

L'introduction de la viscosité en modifiant la structure du tenseur des contraintes va modifier l'équation de la Quantité de Mouvement. L'équation d'Euler va donc être remplacée par une équation plus générale dénommée équation de de Navier-Stokes. D'autre part, l'effet stabilisant de la viscosité qui a tendance à uniformiser la quantité de mouvement va nous amener à distinguer les écoulements dit laminaires (où les filets fluides restent parallèles les uns aux autres) et les écoulements turbulents, où cette condition n'est plus remplie et qui présentent un mélange important. Un critère de transition fondé sur un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds, permet en général de caractériser cette transition.

5.2.1 Loi de comportement

Pour l'instant nous avons considéré deux filets fluides horizontaux se déplaçant à des vitesses différentes et nous avons vu que la viscosité avait tendance à égaliser ces deux vitesses en créant un flux vertical de quantité de mouvement horizontale. C'est une situation d'étude idéalisée et il ne faut pas oublier que dans les situations réelles, il y a, en général, trois composantes pour la quantité de mouvement et que ces trois composantes sont susceptibles de diffuser dans trois directions distinctes ce qui conduit à neuf possibilités. Déterminer toutes ces possibilités constitue la détermination de la loi de comportement d'un fluide. Bien sûr afin de simplifier cette étude, on utilise la notation tensorielle et matricielle ce qui est bien plus pratique qu'écrire en permanence toutes ces composantes.

5.2.1.1 Cas général

Les considérations précédentes nous ont montré que dans les fluides newtoniens en écoulement, les contraintes dépendaient du taux de cisaillement et donc du taux de déformation, on a donc :

$$\mathbf{T} = \underbrace{-p\mathbf{I}}_{\text{partie sphérique}} + \underbrace{\mathbf{T}^d}_{\text{partie déviatorique}} \quad (0.197)$$

Ce tenseur est symétrique (vu en cours de MMC) tandis que le tenseur du gradient des vitesses ne l'est pas. Cependant on rappelle que l'on a la décomposition :

$$\mathbf{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)}_{\text{S: partie symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)}_{\text{\Omega: partie antisymétrique}} \quad (0.198)$$

Ainsi la relation $\mathbf{T}^d(\mathbf{L})$ n'est-elle pas compatible avec le principe de symétrie et doit-on remplacer cette relation par la relation suivante : $\mathbf{T}^d(\mathbf{S})$. On peut comme on l'a fait précédemment supposer que pour un fluide newtonien, cette relation doit être linéaire. Cependant comme on doit mettre en correspondance un tenseur à 9 termes avec un tenseur à 9 termes cela fait 81 possibilités et l'on devrait écrire :

$$T_{ij}^d = A_{ijkl} S_{kl} \quad (0.199)$$

Où A_{ijkl} est un tenseur d'ordre 4. Cependant des considérations de symétrie et d'isotropie que nous ne détaillerons pas viennent nous sauver la mise et l'on peut montrer que cette relation se ramène à :

$$T_{ij}^d = 2AS_{ij} + B\delta_{ij}S_{ll} \quad (0.200)$$

Ce que l'on note en général sous la forme :

$$T_{ij}^d = \underbrace{\mu}_{\text{première viscosité}} \left[2S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{ll} \right] + \underbrace{\xi}_{\text{seconde viscosité}} (\delta_{ij} S_{ll}) \quad (0.201)$$

En général, on ne trouve dans les tables que la première viscosité, la seconde viscosité⁶ n'étant en général pas mesurée (elle est cependant du même ordre de grandeur). Comme $S_{ll} = \text{div}(\mathbf{v}) = 0$, on voit que sa contribution est directement proportionnelle au taux de variation relatif du volume et que sa contribution disparaît dans le cadre de l'étude des fluides incompressible qui constitue le cadre de cette première année.

5.2.1.2 Cas incompressible

Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de comportement se ramène à :

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S} \quad (0.202)$$

Si bien que la différence de flux de contrainte infinitésimale s'écrit :

$$\mathbf{div}(\mathbf{T}) = -\mathbf{grad}(p) + \mu\Delta\mathbf{v} \quad (0.203)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{T}) &= \mathbf{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}) \\ &= \left[-p\delta_{ij} + 2\mu \frac{v_{i,j} - v_{j,i}}{2} \right]_{,j} \mathbf{e}_i \\ &= -p_{,i} \mathbf{e}_i + \mu \left[v_{i,jj} + \underbrace{(v_{j,i})}_{=0} \right]_{,i} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (0.204)$$

c.q.f.d.

5.2.2 Equation de Navier-Stokes incompressible

En utilisant la relation (199), on peut voir que l'équation de la QDM s'écrit désormais pour un fluide newtonien :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) &= -\mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \\ \text{div}(\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (0.205)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes incompressible. On notera qu'elle possède autant d'équations que d'inconnues, si bien qu'elle semble bien posée (i.e. susceptible d'admettre une solution unique) à première vue.

5.2.3 Conditions aux limites

En fait l'équation précédente n'est pas bien posée. En effet, il lui manque des conditions initiales et des conditions aux limites pour que les opérateurs soient pleinement déterminés. En général on utilise les conditions aux limites suivantes (au choix) :

- Entrée
 - Vitesse donnée
 - Pression donnée
- Sortie
 - Pression donnée

⁶ « Bulk Viscosity » en anglais

- Condition de sortie
 - Tout ce qui arrive à ce bord du domaine sort sans influencer le domaine
 - Mal posé si une zone de recirculation est générée au niveau de cette condition de sortie
- Parois
 - Adhérence $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$
 - Si immobile $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Remarque n°1 : pour les fluides parfait la condition suivante, dite de

- Non-pénétration $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0$
- est en général jugée suffisante.

Remarque n°2 : la question de savoir si l'équation de Navier-Stokes incompressible, accompagnée des bonnes conditions initiales et aux limites est bien posé n'est en fait pas un problème si facile. Il résiste par ailleurs tellement bien aux mathématiciens qu'il fait partie des fameux problèmes du millénaire dont la réponse, positive ou négative est susceptible de rapporter 1 000 000 de \$ à son inventeur⁷.

5.2.4 Efforts sur un tube de courant ou un obstacle

Maintenant que la loi de comportement a été modifiée, on va regarder comment cela joue sur les efforts qui agissent sur un tube de courant (et indirectement sur un obstacle sur lequel ce tube de courant s'appuie).

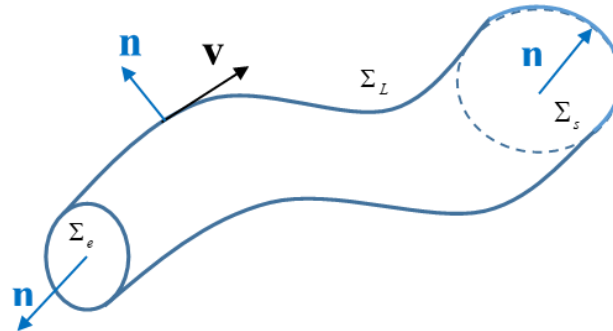


Figure 32: effort sur un tube de courant

En effet, effectuons un bilan de QDM sur le tube de courant de la Figure 32 en se plaçant en régime permanent, il vient :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_e} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds + \iint_{\Sigma_s} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds &= \iint_{\Sigma_e} -p \cdot \mathbf{n} ds + \overbrace{\iint_{\Sigma_e} 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}^{\text{néglige}} + \iint_{\Sigma_s} -p \mathbf{n} ds + \overbrace{\iint_{\Sigma_s} 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}^{\text{néglige}} \\
 &+ \underbrace{\iint_{\Sigma_L} -p \mathbf{n} ds}_{\mathbf{F}_p: \text{effort de pression sur les parois latérales du tube}} + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathbf{F}_\mu: \text{effort visqueux sur les parois latérales}}
 \end{aligned} \quad (0.206)$$

En général, on néglige les efforts visqueux dans les sections d'entrée et de sortie car on suppose qu'il n'y a pas de composante dirigée dans la direction des normales extérieures entrantes et

⁷ A vos crayons.

sortantes. De même on suppose que le régime est établi, c'est-à-dire que le gradient de vitesse ne varie par la direction orthogonale aux normales des parois extérieures. On a donc

$$2\mu\mathbf{D}\cdot\mathbf{n} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i})n_i\mathbf{e}_j = \underbrace{\mu v_{i,j}n_i\mathbf{e}_j}_{=0 \text{ si régime établi}} + \mu v_{j,i}n_i\mathbf{e}_j = \mu \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\tau}_p \quad (0.207)$$

Où l'on a défini le frottement pariétal $\boldsymbol{\tau}_p$ ou flux de QDM dirigé vers la paroi latérale du tube. Au final, le bilan de QDM s'écrit :

$$\iint_{\Sigma_e} [\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + p\cdot\mathbf{n}] ds + \iint_{\Sigma_s} [\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + p\cdot\mathbf{n}] = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\mu \quad (0.208)$$

Où

$$\mathbf{F}_p = \iint_{\Sigma_L} -p\mathbf{n} ds \quad (0.209)$$

Représente la résultante des efforts de pression qui s'exerce sur le tube et :

$$\mathbf{F}_\mu = \iint_{\Sigma_L} \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} ds \quad (0.210)$$

Est la résultante des contraintes visqueuses.

5.2.5 Dissipation de l'énergie cinétique

On conçoit intuitivement que la viscosité, phénomène de diffusion qui cherche à égaler et répartir la quantité de mouvement dans le fluide va également être un phénomène dissipatif. C'est ce que l'on va montrer ici-même en regardant comment l'introduction de la viscosité diminue l'énergie cinétique disponible pour le fluide. En effet, on rappelle que le bilan d'énergie cinétique s'écrit :

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \text{div}(\rho k\mathbf{v}) = \underbrace{\text{div}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})}_{p^{(ext)}} - \underbrace{\mathbf{T}:\nabla\mathbf{v} + \mathbf{f}_v\cdot\mathbf{v}}_{p^{(int)}} \quad (0.211)$$

Ce qui, si l'on néglige les efforts volumiques donne pour la puissance des efforts intérieurs :

$$P^{(int)} = -\mathbf{T}:\nabla\mathbf{v} = -(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}):\nabla\mathbf{v} = p\text{div}(\mathbf{v}) - 2\mu\mathbf{S}:\nabla\mathbf{v} \quad (0.212)$$

Dans le cas incompressible, il ne reste plus que le dernier terme que l'on note en introduisant :

$$\mu\phi_v = 2\mu\mathbf{S}:\nabla\mathbf{v} = \mu(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T):\mathbf{L} = \mu(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T):\underbrace{\frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2} + \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2}}_{\Omega \perp \mathbf{S}} \quad (0.213)$$

ϕ_v est la fonction de dissipation qui s'écrit donc au final :

$$\phi_v = \frac{(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T):(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)}{2} \quad (0.214)$$

Et dont la formulation dans différents systèmes de coordonnées est donnée en annexe du fascicule de travaux dirigés. Ce qui est important de retenir, c'est que la fonction de dissipation est positive si bien que la puissance des efforts intérieurs est bien négative et que le fluide perd *in fine* de l'énergie cinétique.

5.3 Transition Laminaire-Turbulent

En fait on a vu que si, d'un point de vue mathématique, l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Navier-Stokes reste un problème ouvert, nous n'avons rien dit des solutions connues de l'équation. En fait d'un point de vue physique, la grande difficulté de cette équation provient du terme de convection $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ qui décrit le mélange entre trajectoire. C'est un terme non linéaire, c'est-à-dire que la somme de deux solutions connues ne forme pas nécessairement une nouvelle solution de l'équation. On ne peut donc utiliser les méthodes connues fondées sur le principe de superposition qui ont permis de résoudre les équations de Maxwell dans le vide en électromagnétisme ou l'équation de la chaleur en thermique par exemple. Il existe cependant deux familles de solutions analytiques de cette équation mais qui possèdent des domaines d'application limités. La première concerne les écoulements dit laminares ou parfois « rampants »⁸ ; la seconde utilise des solutions de l'équation d'Euler que l'on obtient lorsque les écoulements restent bidimensionnels voire axisymétriques et fondée sur la théorie des fonctions d'une variable complexe (fonction holomorphe). Vous verrez cette seconde méthode en deuxième année mais comme les écoulements qui ne sont pas laminaire, ne sont en général pas bidimensionnels (ou axisymétriques) non plus, elle reste également d'une utilité limitée. Les méthodes numériques (cf. méthode des volumes finies) restent donc la méthode actuelle de conception d'un objet (aileron, carrosserie, vanne, chambre de combustion, lignes d'échappement ou « exhaust pipe »...etc.) technologique impliquant la mécanique des fluides. Cependant un dernier problème vient également limiter leur possibilité de prédiction : la turbulence des fluides. En fait il n'existe pas à proprement parler de définition de cette dernière. Si on sait à peu près définir un écoulement laminaire puisque c'est un écoulement où le mélange de trajectoire ne domine pas et où deux filets fluides parallèles l'un à l'autre le reste au cours de l'écoulement, un écoulement turbulent est généralement défini comme un écoulement qui a cessé d'être laminaire et qui donc peut concerner un grand nombre de structures d'écoulements différentes. Le Tableau 1 représente les propriétés communément attribuées aux écoulements laminares et turbulents.

Tableau 1: comparaison entre les écoulements laminares et turbulents

Laminaire	Turbulent
Écoulement organisé	Écoulement irrégulier
Écoulement prédictible	Difficilement prédictible
Donné par l'équation de Navier-Stokes	Donné par l'équation de Navier-Stokes
Conditions aux Limites (C.L.)	+C.L.+C.I.
Conditions Initiales (C.I.)	Existence de nombreuses échelles
Dominé par la Diffusion de la quantité de mouvement	Dominé par la Convection de la quantité de mouvement

D'un point de vue numérique, la propriété qui rend difficile la simulation numérique des écoulements est l'existence de nombreuses échelles (en général des tourbillons de taille très différentes). Si bien que la simulation numérique exacte qui demanderait la résolution des plus petites échelles observable est tellement couteuse en temps de calcul qu'elle est, en général, impossible à obtenir pour les écoulements d'intérêt industriels. On a donc besoin de modéliser la turbulence et d'utiliser des modèles de turbulence pour résoudre les écoulements industriels. Ceci fait l'objet d'un cours dédié en seconde année.

⁸ On parle de « creeping » flow en anglais

5.3.1 Nombre de Reynolds

Si l'on regarde de nouveau l'équation de Navier-Stokes, l'équation de la QDM s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (0.215)$$

Le second terme du premier membre, en rouge, représente donc le terme d'inertie et le dernier terme du second membre représente le terme de viscosité. D'un point de vue qualitatif il est extrêmement intéressant de savoir lequel de ces deux termes domine l'équation. C'est pourquoi on introduit le rapport :

$$\text{Re} = \frac{\|\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|}{\|\mu \Delta \mathbf{v}\|} \quad (0.216)$$

Que l'on nomme nombre de Reynolds (en l'honneur d'O. Reynolds dont nous verrons les travaux par la suite). En général on le détermine en effectuant une analyse par ordre de grandeur :

$$\begin{aligned} \text{Re} &\simeq \frac{\rho U \times \frac{U}{L}}{\mu \frac{U}{L^2}} \text{ avec } \nabla \simeq \frac{1}{L} \\ &= \frac{\rho U L}{\mu} \end{aligned} \quad (0.217)$$

Si bien qu'au final

$$\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu} \quad (0.218)$$

Ce nombre est donc le produit d'une vitesse caractéristique de l'écoulement par une longueur caractéristique divisé par la viscosité cinématique. Il est donc sans dimension et comme sa valeur est relativement arbitraire et fonction du choix de ces grandeurs caractéristiques, on précise souvent la longueur qui a été utilisée pour le construire.

5.3.2 Equation de Stokes

Lorsque le nombre de Reynolds est petit, on peut donc négliger le terme d'inertie devant le terme de viscosité et les solutions de l'équation de Navier-Stokes vont se rapprocher des solutions de l'équation suivante :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (0.219)$$

Dite équation de Stokes. On remarque que cette équation est désormais linéaire (et proche de l'équation de la chaleur). On va donc pouvoir utiliser tous l'arsenal mathématique liées aux méthodes linéaires pour le résoudre et c'est en général cette équation qui possède des solutions analytiques. Bien que la plupart des problèmes industriels concernent les écoulements à fort Reynolds, la connaissance de solution analytique est utile, à la fois comme point de référence (écoulement laminaire) et comme point de comparaison pour valider un code de calcul industriel par exemple (qui doit au moins être capable de reproduire des solutions connues).

5.3.2.1 Exemple d'écoulements rampants

Lorsque le nombre de Reynolds est vraiment petit devant l'unité, on parle souvent d'écoulement rampants. La Figure 33 montre la visualisation expérimentale d'un tel écoulement autour de deux cylindres.

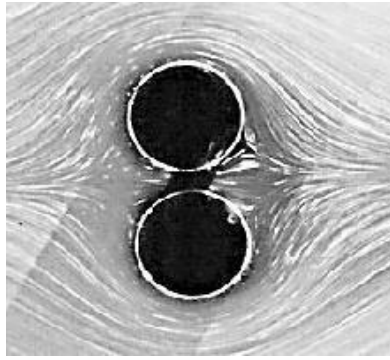


Figure 33: Écoulement rampant autour de deux cylindres. $Re = 0,01$. Taneda 1979, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 46, 1935-1942.

On remarque que des filets fluides initialement parallèles restent dans une grande mesure parallèles. On remarque également que la dissymétrie de l'écoulement est tenue et que l'on a du mal à dire que l'écoulement provient de la gauche. C'est-à-dire que si l'on applique le critère du revers cinématique, on aurait presque un écoulement acceptable. Cela signifie que les écoulements rampants dissipent très peu l'énergie cinétique (il existe un théorème à ce sujet, il s'agit d'un minimum de dissipation) et que l'on peut presque renverser le temps sans soucis. Ceci est bien sûr lié au fait qu'ils ne mélangent pas grand-chose...

5.3.2.2 Écoulement de Poiseuille

Vous verrez en séance de travaux dirigés comment établir la solution analytique d'un écoulement laminaire établi dans un tuyau cylindrique ou écoulement de Poiseuille (cf. Figure 34)

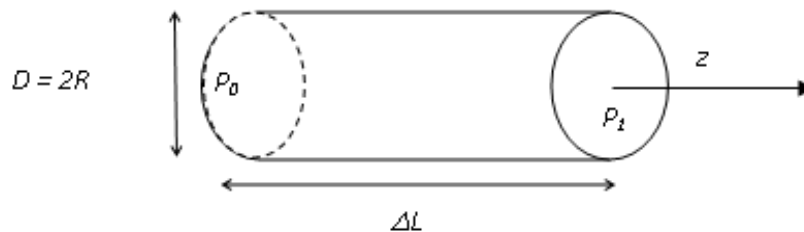


Figure 34: écoulement de Poiseuille

On montre qu'en régime permanent et établi, l'équation de Stokes donne, en coordonnées cylindriques et en l'absence de rotation du fluide :

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (0.220)$$

De cette équation, on déduira que le profil de vitesse possède une forme parabolique et qu'il existe la relation suivante entre le débit et la différence de pression :

$$Q_v = \frac{\pi}{8\mu} R^4 \frac{\Delta P}{\Delta L} \quad (0.221)$$

Dite relation de Hagen-Poiseuille.

5.3.3 Transition vers la turbulence

Quand le nombre de Reynolds augmente on quitte progressivement le régime des écoulements laminaire pour rentrer dans le domaine des écoulements turbulent. En fait la progressivité de cette transition fait encore débat. Et l'existence de nombres de Reynolds critiques, et de mécanismes de transition fait l'objet de recherches actives et de progrès récents.

5.3.3.1 Idée générale

Un exemple classique de transition entre un écoulement laminaire et turbulent concerne l'observation d'un panache de cigarette : au départ les filets de fumée montent de façon relativement parallèle puis tout d'un coup une bouffée semble disperser la fumée à une distance donnée de la cigarette. En fait cette situation a été reproduite de nombreuses façons différentes en laboratoire, par exemple par le Pr. J. Karweit de John Hopkins University et dont on peut voir les résultats de visualisation sur la Figure 35.

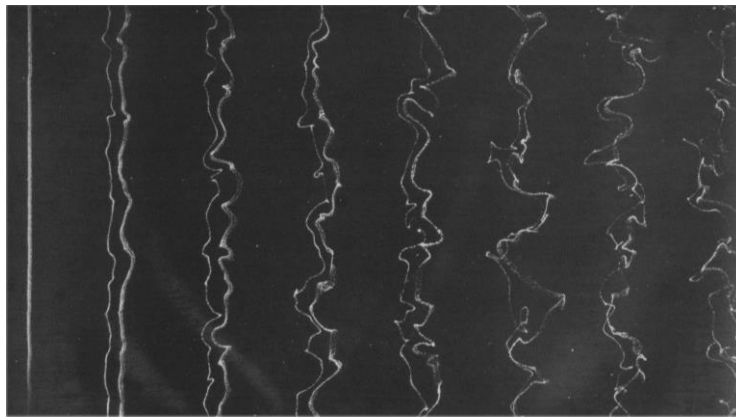


Figure 35: visualisation du transport turbulent (Pr. Karweit John Hopkins University)

Dans cette expérience qui a lieu dans l'eau, le Pr. Karweit utilise un fil de platine qui sert à électrolyser localement l'eau. Les bulles générées servent alors de traceur qui permet de suivre les mouvements du fluide. Sans rentrer dans le domaine très complexe des écoulements diphasiques, on peut remarquer que ces traceurs ne sont pas parfaits, c'est-à-dire qu'ils ne suivent pas exactement les trajectoires des particules fluides. En fait on peut montrer que les bulles ont tendance à migrer vers le cœur des tourbillons (où il y a un minimum de pression) et permettent donc de visualiser des lignes tourbillonnaires. On voit qu'au fur et à mesure que l'on s'éloigne du lieu de l'émission ces lignes tourbillonnaires se déstabilisent de plus en plus jusqu'à atteindre un moment où les deux lignes (O_2 et H_2) se mélangent. On retrouve le comportement générique de la fumée de cigarette et l'on peut caractériser le moment de la transition vers le mélange/turbulence par un nombre de Reynolds critique :

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}} \quad (0.222)$$

Cependant la valeur de ce nombre de Reynolds critique est loin d'être universel et sera en général différente pour deux configurations différentes mais plus encore, pour une même configuration, elle peut dépendre des modalités de réalisation voire de l'expérimentateur ! On admet cependant qu'à partir d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 2000, on est susceptible de transiter vers un écoulement turbulent. On voit qu'entre les écoulements rampants ($Re \ll 1$) et les écoulements turbulents pleinement développés ($Re \gg 2000$), il existe toute une gamme de régimes.

En résumé :

Il existe donc différents Régimes limites

- $Re = 0$ écoulement rampants (Stokes)
- $0 < Re < 2000$ écoulements laminaires (Navier-Stokes)
- $Re > 2000$ écoulements turbulents (Navier-Stokes)
- $Re = \infty$ (Euler)

Remarques : ces valeurs ne sont au mieux que des ordres de grandeur et dépendent fortement du choix de U et L . D'autre part, il n'est pas certain que les solutions de Navier-Stokes deviennent effectivement des solutions de l'équation d'Euler lorsque le nombre de Reynolds devient effectivement infini. La limite peut ne pas exister et/ou être singulière (c'est encore un problème ouvert).

5.3.3.2 Expérience de Reynolds

La première expérience sur la transition entre écoulement laminaire et écoulement turbulent est due à O. Reynolds (1883). Elle est représentée à partir de l'une de ses publications originales sur la Figure 36. Il s'agit d'un écoulement dans un tube cylindrique dont on augmente progressivement la vitesse et surtout dont on visualise l'écoulement central au moyen de l'injection d'un filet de colorant.

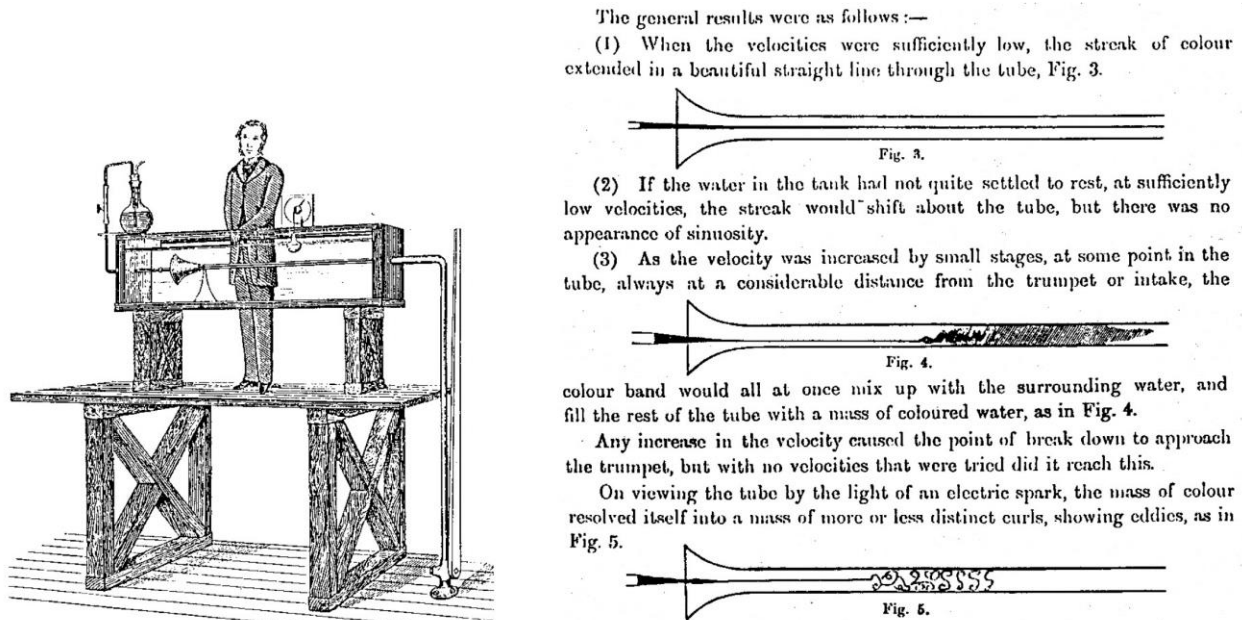


Figure 36: expérience de Reynolds

Les trois principaux régimes observés par Reynolds sont représentés. Le régime laminaire observé à faible nombre de Reynolds, le régime de transition pour les nombres de Reynolds intermédiaires et le régime pleinement développé pour les grands nombres de Reynolds. Ces régimes sont également illustrés avec des clichés d'une version moderne de l'expérience de Reynolds sur la Figure 37. Il y a eu récemment de nombreux progrès dans la compréhension du mécanisme de transition (travaux de Kerswell, Hof, Duguet et au LEMTA de Chérif Nouar voire de George Peixoto, un ancien du laboratoire).

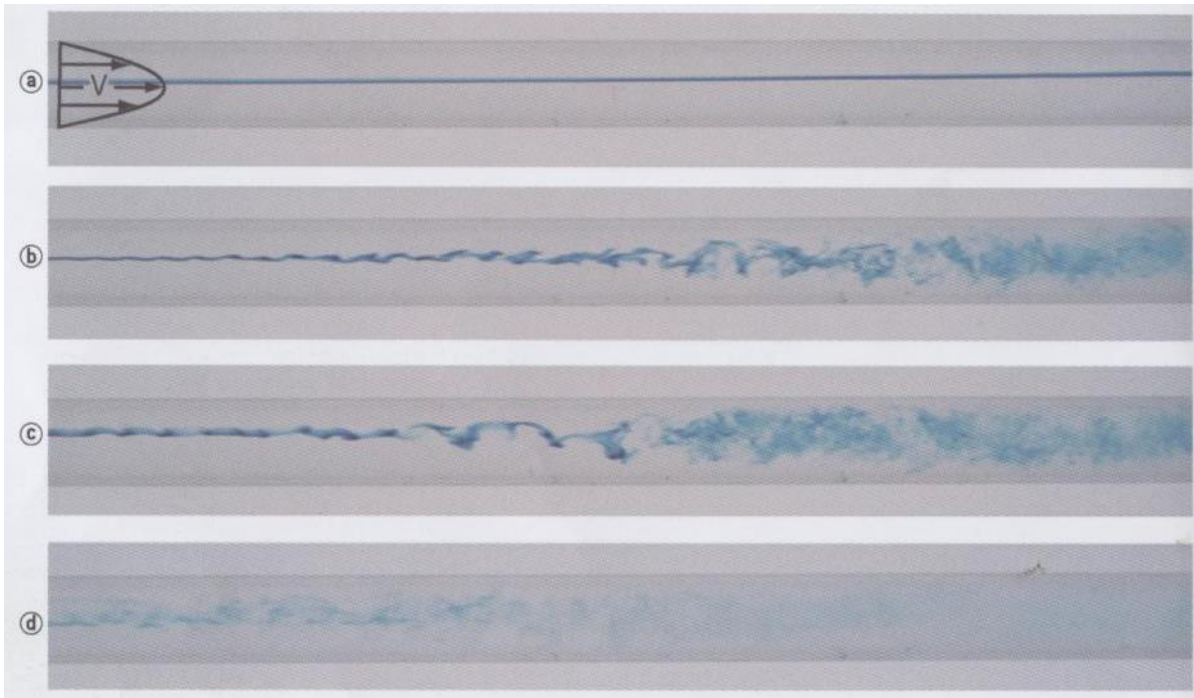


Figure 37: version moderne de l'expérience de Reynolds

5.3.4 Nature des écoulements turbulents

Pour résumé, les écoulements turbulents sont caractérisés par les propriétés suivantes illustrées sur la Figure 38 :

- Ils sont par nature irréguliers et instationnaires
- En général, ils correspondent à des écoulements tridimensionnels
- Ils présentent une grande gamme d'échelles différentes
- On peut les voir comme une sorte de « Soupe » de tourbillons

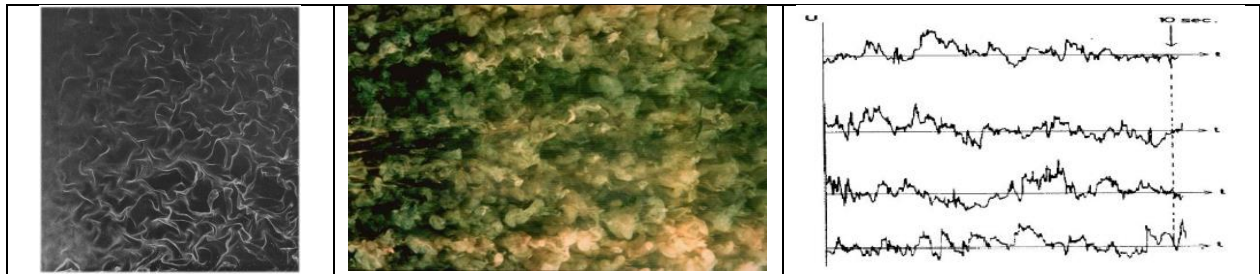


Figure 38: Nappe tourbillonnaire à gauche (J.Karweit), cliché Onera au centre, exemple de signal turbulent

Ces propriétés illustrent toute la difficulté de comprendre et de modéliser les écoulements turbulents qui résistent à l'analyse depuis plus de 150 ans. Pour conclure ce sujet, je me permets de rajouter les citations de deux illustres physiciens :

« On doit porter l'attention sur l'extraordinaire difficulté de notre sujet. »

Sir Horace Lamb (1849-1934) en 1895

« On doit admettre que le résultat principal de 50 années de recherche sur la turbulence est la reconnaissance des profondes difficultés du sujet. »

S.A. Orszag en 1970

Que de progrès en 75 ans ! 50 ans plus tard encore, il y a cependant eu quelques (rares) avancées... Principalement dans le domaine des simulations numériques. Mais c'est une autre histoire...

6 Perte de charge

6.1 Introduction

6.1.1 Origine des pertes de charge

On a vu aux chapitres précédents que les fluides newtoniens incompressibles obéissent à l'équation de Navier-Stokes :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{accumulation locale de Q.D.M.}} + \underbrace{\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}}_{\text{croisement des trajectoires et terme d'inertie}} = \underbrace{-\mathbf{grad} p}_{\text{Effort de surface isotrope}} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{v}}_{\text{Effort de surface visqueux}} + \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{Effort volumique}} \quad (0.223)$$

Pour la résoudre, on a besoin de conditions initiales et de conditions au limites. En général on suppose que le fluide en contact avec une paroi possède la même vitesse que la paroi. Cependant pour résoudre analytiquement cette équation, il n'existe pas beaucoup de méthodes et, en général on finit souvent par négliger le terme d'inertie : on obtient alors l'équation de Stokes. Cependant, cette équation n'est une approximation de la réalité valable qu'à faible nombre de Reynolds. A très grand nombre de Reynolds, le terme visqueux devient négligeable et l'on se rapproche de l'équation d'Euler. Si l'on compare l'ordre des dérivées entre les deux équations, on peut voir que la plus grande dérivée de l'équation d'Euler (E.) est un tandis que pour Navier-Stokes (N.S.) il y a un terme d'ordre deux en espace. Il s'ensuit que les conditions aux limites devront être beaucoup plus strictes pour (N.S.) ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$ à la paroi par exemple) tandis que la condition de non-pénétration ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$) sera suffisante pour (E.). Une conséquence importante de l'équation d'Euler est la conservation de la charge. La charge représente l'énergie mécanique du fluide. Or on peut voir que celle-ci se dégrade dans de nombreux écoulements réels. Ceci génère naturellement de l'entropie. Un critère de création d'entropie est celui dit du « revers cinématique ». Et l'on peut voir sur des vidéos d'écoulement que si le nombre de Reynolds tend vers l'infini, ce critère disparaît, il y a donc irréversibilité et la charge ne sera plus conservée. Il y a deux raisons principales à ceci :

1. Les trajectoires se mélangent et l'écoulement n'est plus stationnaire, on doit donc définir une charge moyenne dans le temps.
2. L'écoulement n'est plus irrotationnel.

On montre que l'équation d'Euler incompressible ne peut générer de nouveaux tourbillons (c'est un théorème dû à Helmholtz). En fait les tourbillons sont générés par frottement autour des obstacles dans l'écoulement (tout ceci sera détaillé dans le cours de deuxième année). En général, on peut confiner la zone de génération de ces tourbillons à une fine couche d'épaisseur variable autour de l'obstacle appelée « couche limite ».

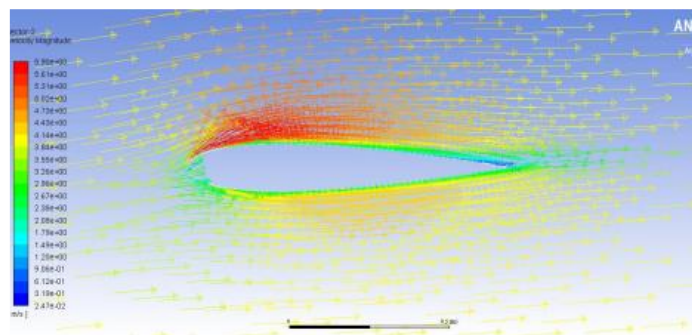
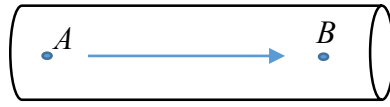


Figure 39: couche limite autour d'une aile d'avion

Pour toutes les raisons invoquées plus haut, on écrit pour un fluide visqueux incompressible en régime permanent, la relation de Bernoulli sous la forme :



$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\rho g} + z_B + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta H_t \quad (0.224)$$

Où $\Delta H_t > 0$ est la perte de charge. Comme la création d'entropie, on peut toujours mesurer la charge en A et en B et en déduire la perte de charge ; cependant, comme la création d'entropie, elle est toujours difficile à prédire théoriquement. L'approche développée maintenant sera donc fortement empirique et phénoménologique.

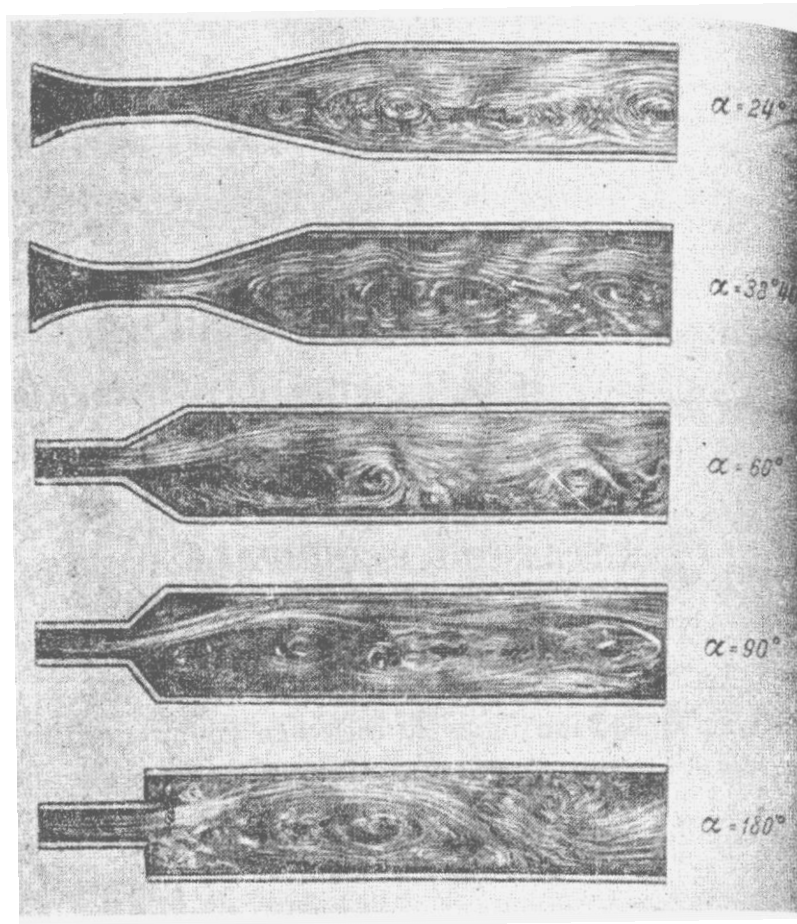


Figure 40: origine des pertes de charge dans un diffuseur

On peut voir sur la Figure 40 que l'écoulement dans un diffuseur est loin d'être irrotationnel. On peut voir également sur la Figure 41, que le profil de vitesse dans un diffuseur dépend fortement de l'angle de ce dernier. En particulier on peut observer l'apparition de zone de recirculation et de séparation de l'écoulement pour les deux angles de 16° .

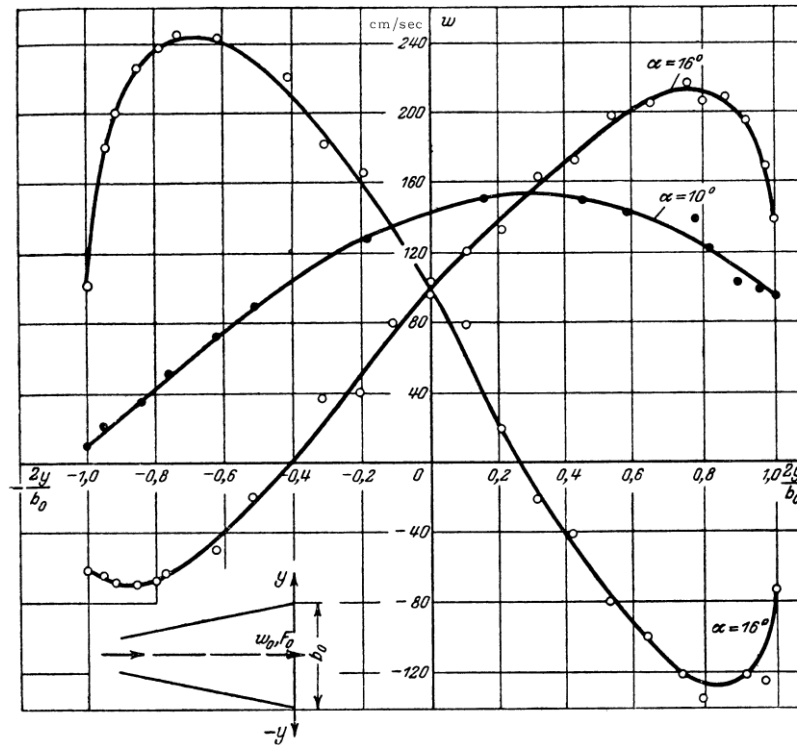


Figure 41: profil de vitesse dans un diffuseur

6.1.2 Pertes de charge moyenne en conduite

6.1.2.1 Définitions

Pour dimensionner une installation hydraulique, on va effectuer un certain nombre d'hypothèses ; la première étant qu'en tout point d'une section droite de la conduite, la vitesse, la pression et la charge sont les mêmes. En fait ceci est évidemment faux mais cela revient à calculer des grandeurs moyennées sur la section droite⁹.

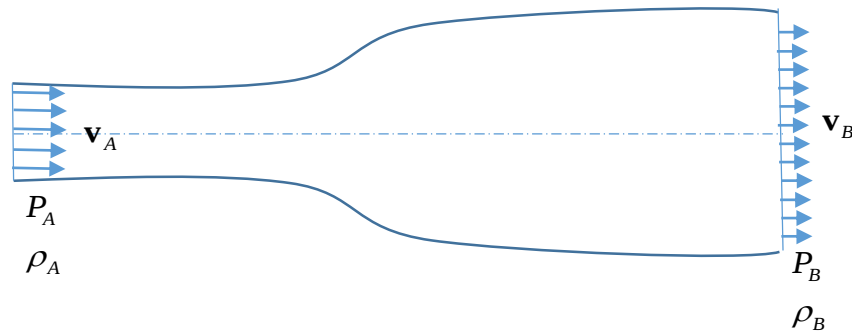


Figure 42: perte de charge moyenne en conduite

On peut calculer le débit volumique :

$$Q_v = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S v ds \quad (0.225)$$

⁹ En fait, en lien avec la raison n°1, ces moyennes sont en fait des moyennes spatio-temporelles. Nous ne développerons pas plus avant cette approche que l'on peut trouver dans les ouvrages de Comolet donnés en référence.

La vitesse débitante (ou vitesse moyenne) est :

$$U = \frac{Q_v}{S} \quad (0.226)$$

Le débit d'énergie mécanique à travers la surface S est :

$$E = \iint_S \left(P^* + \rho \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (0.227)$$

Où P^* est la pression motrice donnée par :

$$P^* = P + \rho g z \quad (0.228)$$

Ce qui conduit à

$$E = P^* Q_v + \underbrace{\iint_S \left(\rho \frac{v^3}{2} \right) ds}_{\frac{\rho}{2} U^3 S \iint_S \left(\frac{v}{U} \right)^3 \frac{ds}{S}} \quad (0.229)$$

Où

$$\alpha = \frac{1}{S} \iint_S \left(\frac{v}{U} \right)^3 ds \quad (0.230)$$

α est le coefficient d'énergie cinétique. En général, $\alpha \neq 1$ car la moyenne du cube n'est pas égale au cube de la moyenne. On a donc :

$$E = \underbrace{\left(P^* + \alpha \rho \frac{U^2}{2} \right)}_{\text{pression totale moyenne}} Q_v \quad (0.231)$$

Et l'on définit la charge totale moyenne comme

$$H = \frac{E}{\rho g Q_v} = \frac{P^*}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (0.232)$$

Si l'on connaît le profil de vitesse dans la conduite, alors on peut calculer le coefficient d'énergie cinétique.

6.1.2.2 Exemples

Profil de vitesse uniforme (fluide parfait)

$$U = \frac{1}{S} \iint_S v ds = V_0 \quad (0.233)$$

$$\alpha = \frac{1}{S} \iint_S \left(\frac{V_0}{V_0} \right)^3 ds = 1 \quad (0.234)$$

Profil parabolique (écoulement de Poiseuille)

$$U = \frac{1}{S} \iint_S V_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) ds \quad (0.235)$$

Or

$$\int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr = \frac{R^2}{4} \quad (0.236)$$

Donc

$$U = \frac{V_m \pi R^2}{2S} = \frac{V_m}{2} \quad (0.237)$$

Ce qui donne

$$\alpha = \int_0^R 2^3 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^3 \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} \quad (0.238)$$

En utilisant l'identité

$$(a-b)^3 = \underbrace{(a-b)^2}_{a^2+b^2-2ab} (a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (0.239)$$

Il vient :

$$\alpha = \frac{16}{R^2} \int_0^R \left(1 - 3 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 3 \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \left(\frac{r}{R} \right)^6 \right) r dr = 2 \quad (0.240)$$

Dans la pratique, lorsque l'écoulement est à grand nombre de Reynolds, le coefficient d'énergie cinétique est très proche de un (en fait légèrement supérieur à un), et l'on prend un en général¹⁰.

6.2 Pertes de charge linéaires

Si le fluide est newtonien visqueux, le théorème de Cotton-Fortier devient :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) dv + \oint_{\partial V} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p + E_p \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = -P_\mu \quad (0.241)$$

Avec

$$P_\mu = \iiint_V \mu \phi_v dv \quad (0.242)$$

Où ϕ_v est la fonction de dissipation définie équation (0.214). En régime permanent, on peut l'appliquer à un tronçon de conduite entre les sections A et B d'aire S_A et S_B :

$$\iint_{S_A} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + P^* \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{S_B} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + P^* \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = -P_\mu \quad (0.243)$$

Ce qui donne en supposant la pression uniforme sur les sections et en considérant l'altitude de la fibre neutre :

$$S_B U_B \left(\frac{\alpha}{2} \rho_B U_B^2 + p_B + \rho g z_B \right) - S_A U_A \left(\frac{\alpha}{2} \rho_A U_A^2 + p_A + \rho g z_A \right) = P_\mu > 0 \quad (0.244)$$

6.2.1 Conduites cylindriques longues

On s'intéresse à des conduites cylindriques longues, de longueur L , rectilignes ou présentant une courbure faible (sinon on aura ce que l'on appelle un coude), en régime permanent et établi (ce qui nécessite en général, d'être à plus de 30 ou de 40 fois le diamètre de l'entrée). Une fois le régime établi atteint, la nature de la paroi ne changeant pas, on s'intéresse à la perte de pression motrice par unité de longueur :

$$\frac{\Delta P^*}{L} = \frac{P_B^* - P_A^*}{L} \quad (0.245)$$

Qui pour un débit donné sera constante. A priori (et comme on l'a déjà laissé entendre), on ne sait pas calculer cette perte de charge mais on sait qu'elle est fonction de U , D , L , ρ et ν , ce que l'on peut noter.

¹⁰ Tout ça pour ça !

$$\Delta P^* = P_B^* - P_A^* = F(L, U, D, \rho, \nu) \quad (0.246)$$

On montrera au prochain cours consacré à l'analyse dimensionnelle que cette relation peut s'écrire :

$$\frac{\Delta P^*}{\rho U^2 / 2} = \varphi\left(\frac{L}{D}, \frac{UD}{\nu}\right) = \frac{L}{D} \Lambda\left(\frac{UD}{\nu}\right) \quad (0.247)$$

Soit

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g} \frac{L}{D} \underbrace{\Lambda(Re_D)}_{\text{coefficient de pertes de charge}} \quad (0.248)$$

On peut remarquer que dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, on peut calculer Λ . On part de la loi de Hagen-Poiseuille :

$$\frac{\pi}{8\mu} R^4 \frac{\Delta P}{\Delta L} = Q_v = \pi R^2 U \quad (0.249)$$

Ce qui donne

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = \frac{8\mu U}{R^2} = \frac{16}{2R} \frac{\rho U^2}{2} \frac{4\mu}{\rho U 2R} = \frac{64}{D} \frac{\rho U^2}{2} \frac{1}{Re_D} \quad (0.250)$$

D'où le coefficient de perte de charge :

$$\Lambda = \frac{64}{Re_D} \quad (0.251)$$

En général, on ne sait pas calculer Λ même si des modèles existent (comme ceux de Blasius ou de Karman-Nikuradse pour les écoulements turbulents). Les résultats empiriques sont souvent résumés sur une abaque (dite de Moody) où l'on a rajouté la rugosité relative de la paroi, on a donc une dépendance du type :

$$\Lambda(Re_D, k/D) \quad (0.252)$$

Où k est la hauteur des rugosités. L'abaque de Moody vous est donné Figure 43 (et également dans le fascicule de TD).

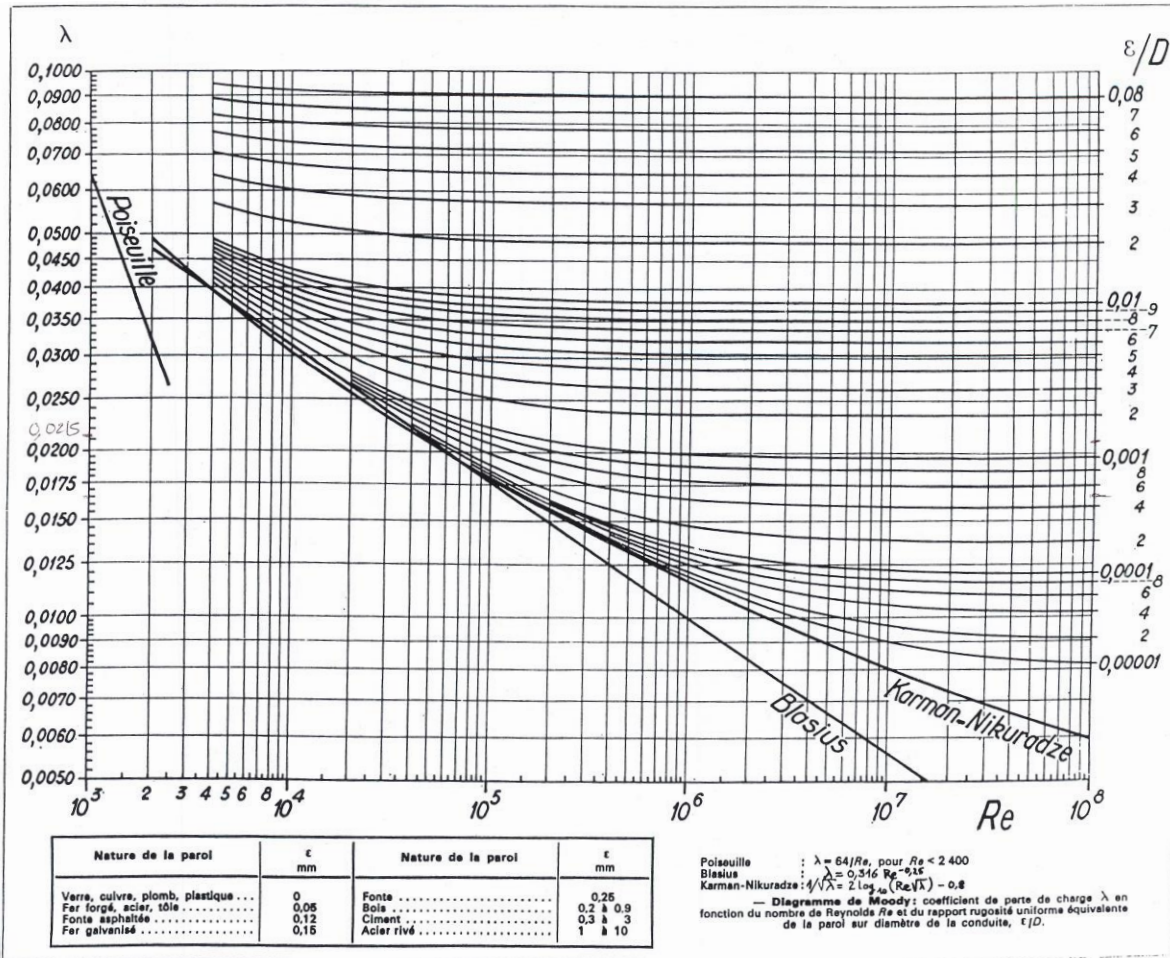


Figure 43: abaque de Moody pour les pertes de charge en conduite

La loi de Blasius est souvent utilisée pour approcher les pertes de charge dans les conduites turbulentes lisses, elle est donnée par :

$$\Lambda = \frac{0,316}{Re_D^{1/4}} = \left(\frac{1}{100 Re_D} \right)^{1/4} \quad (0.253)$$

On remarque que pour une rugosité non nulle, le coefficient de perte de charge tend vers une valeur constante à grand nombre de Reynolds qui ne dépend que de la rugosité relative de la conduite. On dit que l'on est en régime « hydrauliquement rugueux » (par opposition au régime « hydrauliquement lisse » à plus bas nombre de Reynolds).

6.2.2 Conduites de section de forme quelconque

Si la conduite n'est pas de section circulaire, on introduit le diamètre hydraulique D_H , défini par :

$$D_H = \frac{4S}{P} \quad (0.254)$$

Où S est l'aire de la section droite et P est son périmètre. Les pertes de charge s'écrivent alors :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g} \frac{L}{D_H} \Lambda(Re_{D_H}) \quad (0.255)$$

Bien sûr le coefficient Λ dépend désormais de la forme de la conduite et ne sera pas le même pour une section rectangulaire ou ellipsoïdale¹¹.

6.3 Pertes de charge singulières

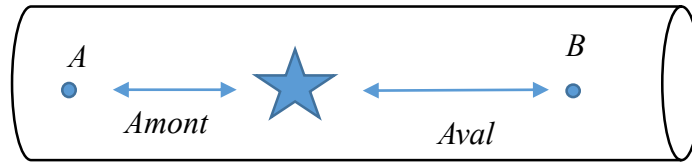


Figure 44: perte de charge singulière

Dans le cas d'une perte de charge singulière, un « accident » de parcours (par exemple un obstacle) crée une perte de charge. Le terme singulier vient du fait que l'on suppose que cela apparaît en un point du circuit hydraulique (une singularité). En pratique ce n'est qu'une approximation, l'obstacle va perturber l'écoulement en aval sur une longueur qui correspond au sillage qu'il induit. En pratique, on peut de nouveau supposer qu'il faut de 30 à 40 diamètres avant que l'écoulement ne se ré-établis. La perte de charge n'est donc « ponctuelle » que si les conduites sont particulièrement longues et en comparaison de la taille de ces dernières. Dans tous les cas la perte de charge induite par une perte de charge singulière s'écrit :

$$\Delta H = K \frac{U_A^2}{2g} \quad (0.256)$$

Où K est le coefficient de perte de charge singulière. On peut calculer le coefficient de perte de charge dans quelques cas particulier (il s'agit bien sûr d'approximation) comme par exemple dans le cas de la formule de Carnot-Borda des deux exemples suivants.

6.3.1 Elargissement brusque

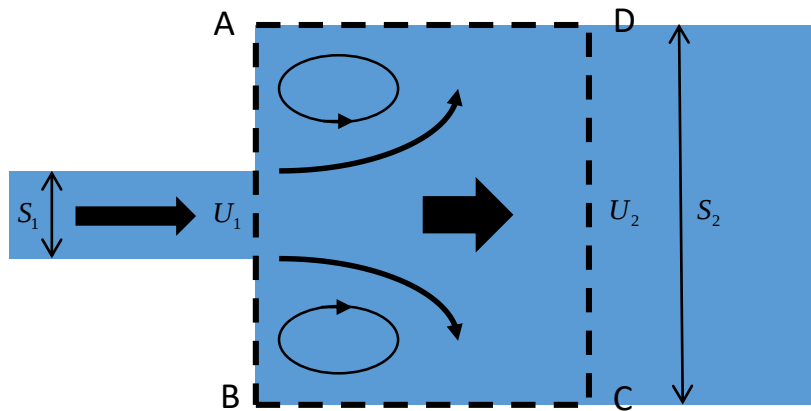


Figure 45: Orifice de Carnot-Borda, élargissement brusque.

Pour estimer les pertes de charge, on se place suffisamment loin en amont et en aval (par exemple à 20 diamètres) et on suppose que la vitesse est constante sur une section droite (on reviendra sur cette hypothèse). Comme la vorticité n'est pas nulle, on ne peut pas appliquer

¹¹ On pourra trouver les corrélations adéquates dans des ouvrages comme « Applied Fluid Dynamic Handbook » ou « Memento des pertes de charge », disponibles à la bibliothèque de l'ENSEM.

Bernoulli partout. (de même, comme on peut le voir Figure 45, on ne peut non plus appliquer le théorème de Cotton-Fortier puisque la conduite ne constitue pas un tube de courant du fait des bulles de recirculation). En fait on conçoit bien qu'il va y avoir une perte d'énergie mécanique (transformée en chaleur dans les tourbillons) et une irréversibilité (en appliquant le critère du revers cinématique). La perte de charge s'écrit :

$$\Delta H = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{P_2}{\rho g} - \frac{U_2^2}{2g} \quad (0.257)$$

On considère le volume de contrôle ABCD, et on applique les lois de conservation :
Débit/masse :

$$U_1 S_1 = U_2 S_2 \quad (0.258)$$

Quantité de Mouvement :

$$P_1 S_2 + \rho U_1^2 S_1 = P_2 S_2 + \rho U_2^2 S_2 \quad (0.259)$$

attention

Ce qui donne :

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho U_2^2 S_2 - \rho U_1^2 S_1}{S_2} = \rho U_2^2 - \rho U_1^2 \frac{S_1}{S_2} = \rho U_2^2 - \rho U_1 U_2 \quad (0.260)$$

Ce qui donne pour la perte de charge :

$$\Delta H = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = \frac{\rho U_2^2 - \rho U_1 U_2}{\rho g} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} \quad (0.261)$$

$$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad (0.262)$$

Ce qui constitue la formule de Carnot-Borda. On en déduit le coefficient de pertes de charge singulière :

$$K = \frac{2g}{U_1^2} \Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{U_1^2} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (0.263)$$

Et si $S_2 \gg S_1$, alors $K \sim 1$.

6.3.2 Rétrécissement brusque

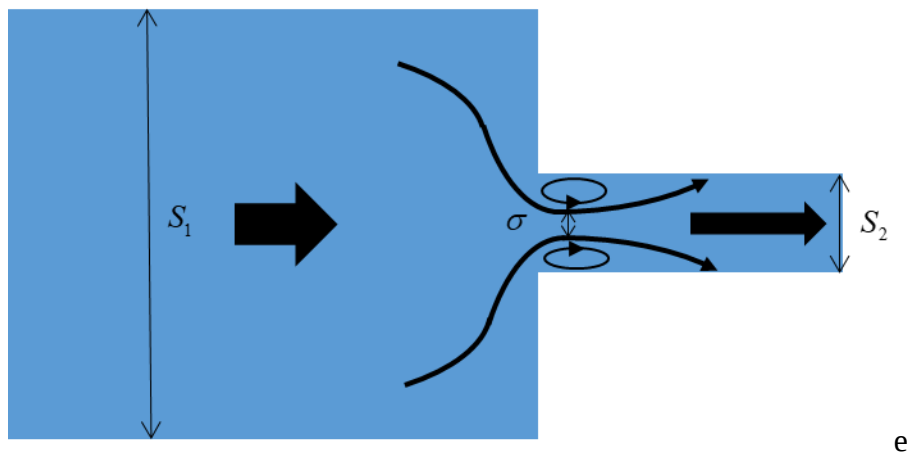


Figure 46: orifice de Carnot-Borda, rétrécissement brusque

La perte de charge a lieu ici entre σ et S_2 .

$$\Delta H = \frac{(U_\sigma - U_2)^2}{2g} \quad (0.264)$$

$$U_\sigma \sigma = U_2 S_2 \quad (0.265)$$

Ce qui donne :

$$\Delta H = \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{S_2}{\sigma} - 1 \right)^2 \quad (0.266)$$

On introduit donc le coefficient de contraction

$$C_c = \frac{\sigma}{S_2} \quad (0.267)$$

La valeur de ce coefficient dépend beaucoup de la géométrie de l'orifice. Ainsi si les angles sont arrondis, on a $C_c \sim 1$ et les pertes de charge sont négligeables. Dans le cas d'angles vifs, on a $0,6 < C_c < 1$. Ce qui donne pour le coefficient de perte de charge (donné en fonction de la vitesse amont :

$$K = \frac{2g}{U_1^2} \Delta H = \frac{U_2^2}{U_1^2} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \quad (0.268)$$

6.3.3 Autres pertes de charge singulières

Le fascicule de TD donné en complément de ce cours contient un certain nombre de coefficients de pertes de charge singulières courantes dans les circuits hydrauliques. On y trouvera en particulier les coefficients de perte de charge pour :

- Elargissement brusque
- Elargissement progressif
- Diaphragme
- Rétrécissement de longueur L
- Coude
- Coude à angles vifs
- Rétrécissement progressif
- Raccordement conduite-réservoir
- Branchements et dérivations de même diamètre

6.4 Circuits hydrauliques

Les circuits hydrauliques sont similaires dans une certaine mesure : on considère des dipôles dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, on retrouve la loi des nœuds et la loi des mailles. Cependant la principale différence provient du fait que les pertes de charge, singulière ou régulière, génèrent en général une relation non-linéaire entre les différences de pression motrice et le débit (via les équations (0.248) et (0.256)).

6.4.1 Loi des nœuds, loi des mailles

6.4.1.1 Loi des nœuds

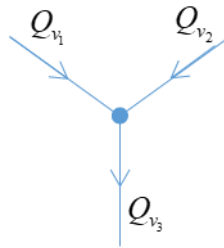


Figure 47: loi des nœuds

6.4.1.2 Loi des mailles

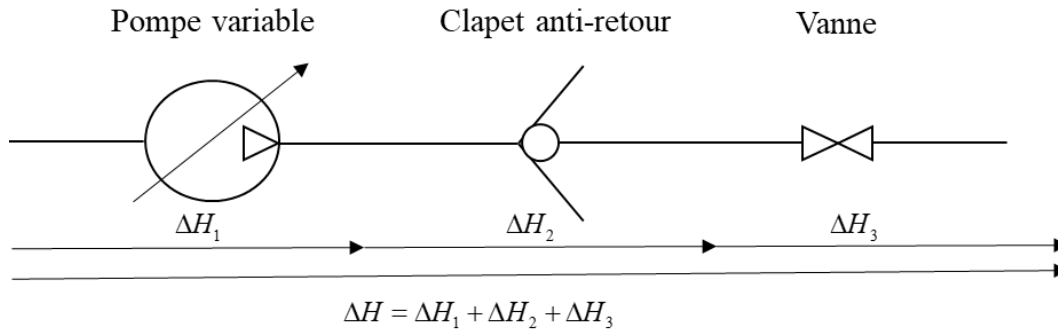


Figure 48: loi des mailles

6.4.2 Pompe (ou « générateur »)

En électricité on différencie les générateurs dit de « courant » des générateurs de « tension » (c'est la fameuse classification Norton-Thévenin). Il en est un peu de même en mécanique des fluides puisqu'une pompe centrifuge aura tendance à imposer une différence de charge entre son entrée et sa sortie tandis qu'une pompe volumétrique à engrenage aura tendance à imposer un débit. La théorie des machines hydrauliques sera développée dans les années ultérieures mais on a tout de même besoin de quelques connaissances que nous détaillerons ici pour comprendre comment déterminer le point de fonctionnement d'un circuit hydraulique. Nous allons nous intéresser au cas d'une pompe centrifuge dont nous allons déterminer la courbe « caractéristique » (ou caractéristique tout cours).

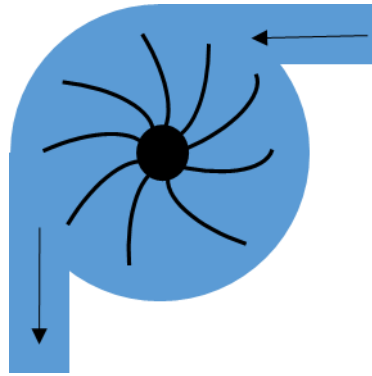


Figure 49: pompe centrifuge

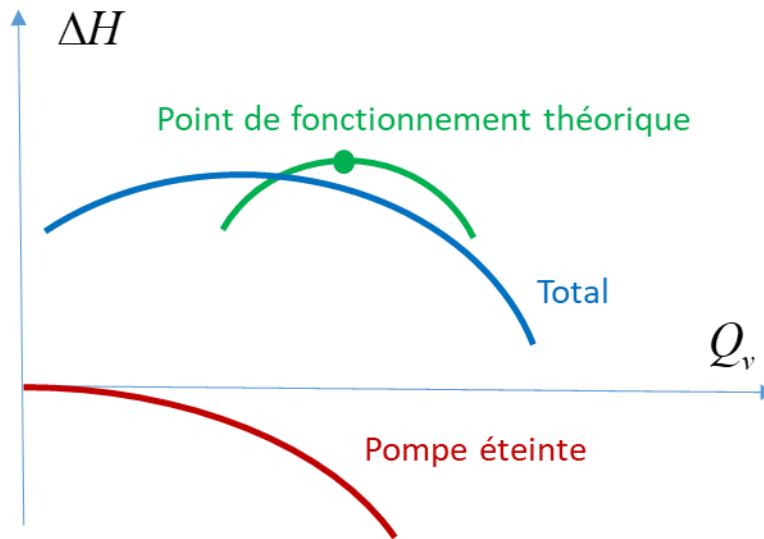


Figure 50 : caractéristique d'une pompe

Pour comprendre l'origine de la forme de la courbe caractéristique d'une pompe centrifuge (représentée en bleu sur la Figure 50), on peut commencer par imaginer la pompe éteinte. Alors les éléments géométriques situés à l'intérieur de la pompe vont s'opposer à un écoulement qui proviendrait de l'extérieur (les pompes ne sont généralement pas étanches). Cela provoque une perte de charge singulière (qui est représentée par la courbe en rouge). Imaginons maintenant que la pompe est parfaite et ne présente pas ces pertes de charges singulières. Les pompes sont fabriquées en général pour avoir un fonctionnement optimal pour un débit donné. C'est le point de fonctionnement théorique. Dans le cas d'une pompe centrifuge, si la pompe ne tourne pas exactement à sa vitesse nominale, il y aura un potentiel glissement entre les pâles de la pompe et le fluide. En fait comme il y a adhérence à la paroi mobile, il n'y a pas réellement glissement mais cela génère des frottements. C'est-à-dire des pertes de charge qui vont dépendre de l'écart à la vitesse nominale mais pas du signe : il y aura perte de charge si la pompe tourne plus vite mais également si elle tourne moins vite (c'est la courbe en vert). La caractéristique de la pompe est la résultante de ces deux contributions (et possède donc la forme en bleu). La caractéristique d'une pompe est un élément déterminant dans la conception d'un circuit hydraulique. Elle est en général fournie par le fabricant. Notez bien qu'une pompe allumée augmente la charge entre son entrée et sa sortie. Enfin vous verrez lors du TD N°4 que si la pression en entrée est trop basse (par exemple inférieure à la pression de vapeur saturante du liquide pompé à la température considérée), il peut se produire un phénomène très néfaste pour la survie de la pompe : la cavitation ou

apparition de bulles de vapeur qui en implosant lorsqu'elle se condensent à nouveau abiment très fortement la pompe et sont à l'origine de nombreuses ruptures (surtout lorsque c'est combiné à de la corrosion).

6.4.3 Conventions

Convention générateur :

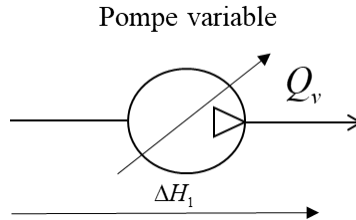


Figure 51: représentation d'une pompe par un dipôle en convention générateur

Comme en électricité, la variation de charge et le débit sont dans le même sens.

Convention récepteur :

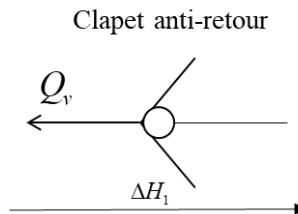


Figure 52: représentation d'un clapet par un dipôle en convention récepteur

Comme en électricité, la variation de charge et le débit sont dans le sens contraire.

6.4.4 Association série

Les circuits hydrauliques sont donc bien similaires aux circuits électriques (cf. Figure 53) ... sauf que rien n'est linéaire...

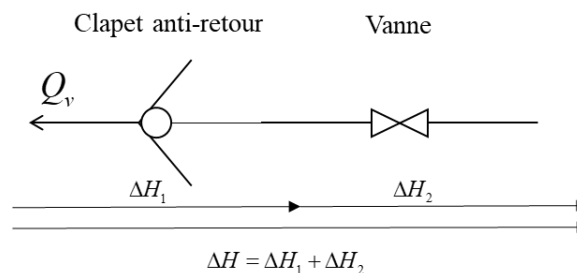


Figure 53: exemple de dipôles fluides en association série

On effectue donc généralement des résolutions numériques (comme en T.P. Matlab) ou graphique, comme vous pouvez le voir sur la Figure 54 pour l'association en série de deux éléments de perte de charge.

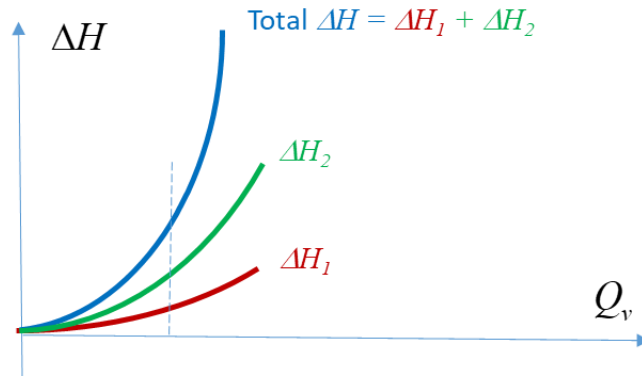


Figure 54: association en série

6.4.5 Association parallèle

De la même façon la Figure 55 représente l'association en parallèle de éléments d'un circuit hydraulique.

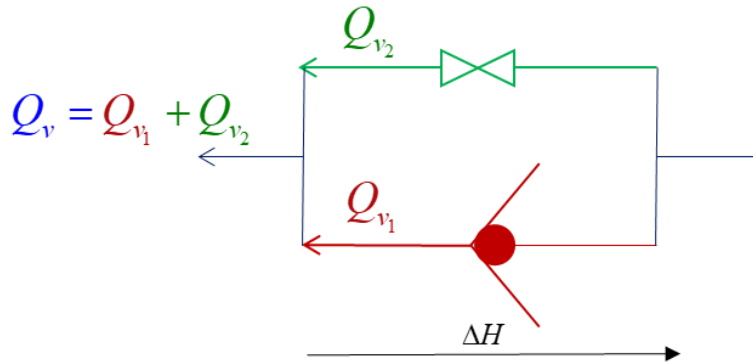


Figure 55: association en parallèle, schématisation

Vous pouvez également voir sur la Figure 56, la construction graphique correspondant à l'association parallèle de deux éléments présentant des pertes de charge.

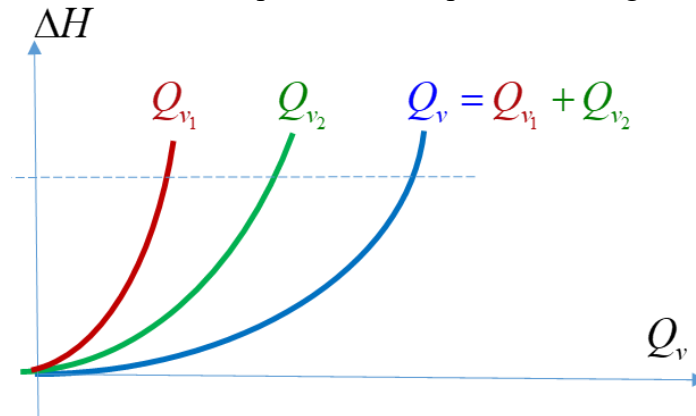


Figure 56: association en parallèle, résolution graphique

6.4.6 Point de fonctionnement d'un circuit hydraulique

La Figure 57 représente un circuit hydraulique très simple sur lequel on a appliqué l'ensemble des convention précédentes. On remarque que l'application de ces dernières, fait que les flèches des pertes de charge ne peuvent être dans le même sens pour la pompe et les éléments

du circuit. C'est logique car la pompe augmente la charge tandis que les éléments de perte de charge la diminue.

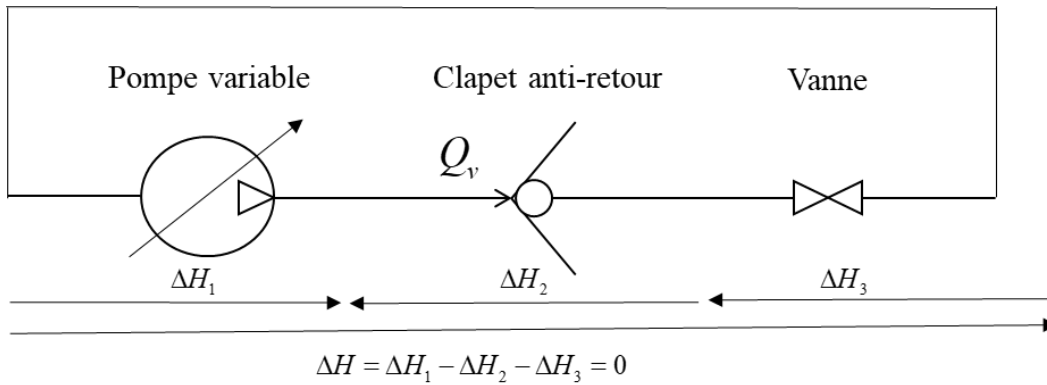


Figure 57: exemple de circuit hydraulique fermé

La Figure 58 représente une construction graphique permettant de trouver le point de fonctionnement d'une pompe couplée à un circuit extérieur (la vanne et le clapet anti-retour sur le schéma précédent).

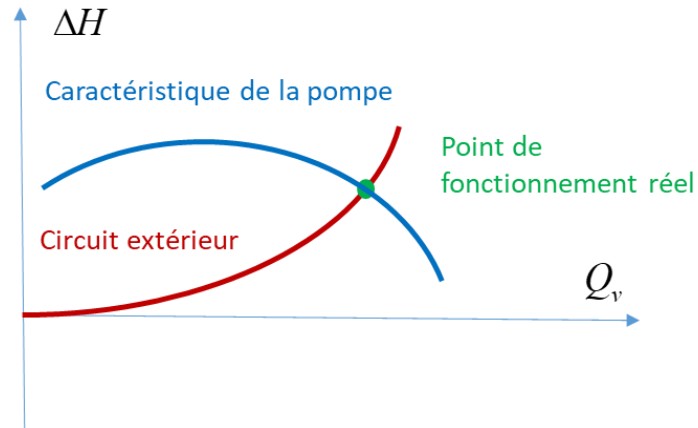


Figure 58: point de fonctionnement

7 Dimensions et Unités

7.1 Grandeur primitive

7.1.1 Exemple de la mesure de la masse

Pour mesurer la masse, on utilise un objet matériel de référence. Pour mesurer la vitesse, par contre, il n'existe pas d'objet matériel de référence. On doit donc adopter un protocole de mesure (cela passe nécessairement par un certain développement technique). Si l'objet est simple, le protocole et la technique sera simple. Ainsi les balances de type Roberval¹², ont été utilisées pour mesurer la masse des objets depuis l'antiquité.

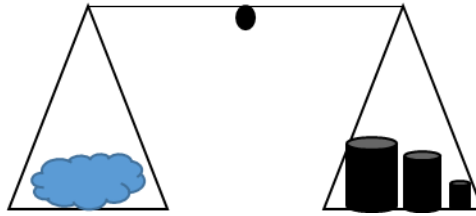


Figure 59: exemple de mesure du poids par une balance du type Roberval.

Le protocole de mesure du poids est donc basé sur une série d'objets matériels de référence auxquels on adjoint un protocole de comparaison. Cela n'est pas toujours possible car certaines grandeurs n'ont pas d'objets de référence. La vitesse par exemple. Ce protocole induit une RELATION d'ORDRE < (« plus lourd que ») entre les objets. Cette relation est stable par répétition et dans le temps. On peut alors déduire une RELATION d'EQUIVALENCE $\sim$ (« pèse le même poids que ») donnée par l'équation

$$a_1 \sim b_1 \Leftrightarrow a_1 < b_1 \text{ et } b_1 < a_1 \quad (0.269)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

- Tout est classable
- Stabilité par union

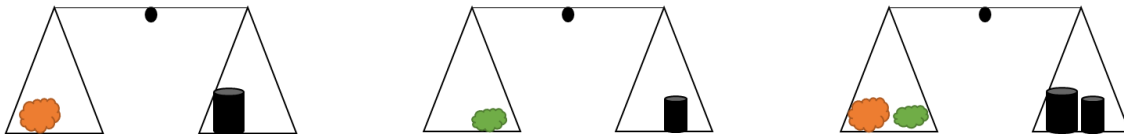


Figure 60: stabilité par union de la mesure du poids

C'est-à-dire que si :

$$a_1 \sim b_1 \text{ et } a_2 \sim b_2 \Rightarrow a_1 \cup a_2 \sim b_1 \cup b_2 \quad (0.270)$$

Remarque : attention aux systèmes d'unité fluctuantes, tel que le poul, l'Euro...etc. Dans de telles circonstances, toute théorie déterministe est impossible.

7.1.2 Unité, définition

Pour l'instant, on a choisi de ne privilégier aucun objet. Une unité sera au contraire un objet privilégié (dont le choix est plus ou moins arbitraire). De la même façon, un système d'unité sera constitué d'un ensemble de n éléments $u_1, \dots, u_n$ strictement ordonnés $u_i < u_{i+1}$

¹² En anglais, balance, se dit « scale » et l'analyse dimensionnelle qui sera développée dans ce chapitre est généralement appelée « scale analysis »

Exemples :

- Masse

$$m \sim 3u_1 \cup 5u_2 \cup 1u_3 \quad (0.271)$$

Ce que l'on peut noter

$$m \sim 351 \quad (0.272)$$

- Date
 - 1 an, 3 mois, 2 jours, 6 heures

Dans ce dernier cas on a un système non rationalisé d'unité, c'est-à-dire que l'on a un rapport non constant entre chaque unité successive du système. Il y a bien eu quelques essais pour corriger cette habitude (pendant la révolution française par exemple) mais ceux-ci se sont heurtés à la difficulté de réaliser des cadrans de montre avec 10 secteurs.

Dans tous les cas, une mesure conduit à un nombre fini de chiffre ; ceci est lié à la disponibilité d'un nombre fini d'unités. Cependant, virtuellement, on peut utiliser un nombre infini d'unité et l'on n'hésitera pas à utiliser de ce fait des nombres réels pour noter le résultat de nos mesures.

7.1.3 Changement de système d'unité

Lorsque l'on passe de 1 kg à 1000g, on prend une nouvelle unité $\bar{u} = ku$ qui donne une mesure $\bar{x} = \frac{1}{k}x$. On remarque que c'est le produit $xu = \bar{x}\bar{u}$ qui est la grandeur pertinente¹³ (et invariante). Pendant longtemps, on a défini le protocole d'un certain nombre de grandeurs, à partir des protocoles les plus simples dont on disposait. On peut en voir quelques exemple dans le Tableau 2, comme le kilogramme, le mètre, la seconde ou la mole.

Tableau 2: anciennes définitions des unités, en italiques les unités dérivées

Unité	Symbole	Définition
Mètre	m	1/40 000 000 du méridien terrestre puis étalon en Pt irridié
Kilogramme	kg	Unité de masse en Pt irridié conservée au BIPM à Sèvres
Seconde	s	1/86400 jour solaire moyen
<i>Ampère</i>	<i>A</i>	<i>Force électromagnétique de $2 \cdot 10^{-7}$ N entre 2 fils parcourus par 1A et éloignés d'un m</i>
<i>Kelvin</i>	<i>K</i>	<i>1/273,16 fois la température du point triple de l'eau</i>
Mole	mol	Quantité de matière de 12g de ¹² C
<i>Candela</i>	<i>Cd</i>	<i>Rayonnement de corps noir à la température de fusion du Pt = 60 cd/cm²</i>

7.2 Grandeur dérivée

C'est une grandeur dont l'unité ne peut être un objet. Elle introduit nécessairement la notion de loi physique. C'est-à-dire d'une expression, en général une fonction, qui fait intervenir la mesure de grandeurs physiques. Si $x_1, \dots, x_n$ est une mesure de grandeurs primitives et x_{n+1} la mesure d'une grandeur dérivée, on aura une relation de la forme :

$$x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \quad (0.273)$$

7.2.1 Exemple de la vitesse

$$v = \frac{l}{t} \quad (0.274)$$

¹³ C'est un tenseur d'ordre 0 ou scalaire. On dit que x varie de façon contra-variante de u .

Si on effectue le changement d'unités :

$$\begin{aligned} l &\mapsto k_1 l = \bar{l} \\ t &\mapsto k_2 t = \bar{t} \end{aligned} \quad (0.275)$$

Dans ce cas la vitesse se transforme en :

$$v \mapsto \bar{v} = \frac{\bar{l}}{\bar{t}} = \frac{k_1}{k_2} \frac{l}{t} = \frac{k_1}{k_2} v \quad (0.276)$$

En fait, on désire que v se transforme également comme une grandeur primitive : de ce fait, il n'y aura pas d'unités privilégiées. Pour ce faire on doit avoir :

$$\exists k_3 / \bar{v} = k_3 v \quad (0.277)$$

Et donc nécessairement

$$k_3 = \frac{k_1}{k_2} \quad (0.278)$$

k_3 ne dépend que de k_1 et de k_2 et aucunement du système d'unité choisi.

7.2.2 Axiomes à vérifier

$$(A1) \ i \in 1, n-1 \quad x_i \mapsto \bar{x}_i \Rightarrow \bar{x}_n = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \quad (0.279)$$

$$(A2) \ i \in 1, n-1 \quad \bar{x}_i = k_i x_i \Rightarrow \exists k_n \in \mathbb{R} / \bar{x}_n = k_n x_n \quad (0.280)$$

$$(A3) \ k_n \text{ ne dépend que des } k_i \text{ où } i \in 1, n-1 \quad (0.281)$$

Propriété : on peut en déduire que la forme générale de la loi doit être de la forme :

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = K x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \quad (0.282)$$

Démonstration :

On a

$$k_n x_n = f(k_1 x_1, \dots, k_{n-1} x_{n-1}) \quad (0.283)$$

D'où

$$k_n = \frac{f(k_1 x_1, \dots, k_{n-1} x_{n-1})}{f(x_1, \dots, x_{n-1})} \quad (0.284)$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial k_i} = \frac{x_i}{f(x_1, \dots, x_{n-1})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(k_1 x_1, \dots, k_{n-1} x_{n-1}) \quad (0.285)$$

En notant

$$\alpha_i(k_1, \dots, k_{n-1}) = \frac{\partial k_n}{\partial k_i} \quad (0.286)$$

et

$$\alpha_i = \alpha_i(1, \dots, 1) = \frac{x_i}{f(x_1, \dots, x_{n-1})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (0.287)$$

on obtient

$$\frac{\alpha_i}{x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f} \quad (0.288)$$

Et

$$\text{si } X(\omega) = x u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} \text{ et } Y(\omega) = y u_1^{\beta_1} \dots u_n^{\beta_n} \text{ alors } XY(\omega) = xy u_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots u_n^{\alpha_n + \beta_n} \quad (0.289)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (0.290)$$

Ce qui donne après intégration de ces dérivées logarithmiques :

$$\ln |f| = C \ln |x_i|^{\alpha_i} \quad (0.291)$$

Soit

$$f = C x_i^{\alpha_i} \quad (0.292)$$

Comme c'est valable quel que soit i , il vient alors (par exemple, en raisonnant par récurrence) :

$$f = k \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \quad (0.293)$$

7.2.3 Espace vectoriel des mesures

Définition : soit $X_1, \dots, X_n$ n grandeurs primitives munies des unités $u_1, \dots, u_n$. On se donne une grandeur X donc la mesure est $x = k x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. On dit que l'unité de X est $u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}$. L'ensemble de toutes les grandeurs dérivées est donc $\{X, u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}\}$ quand $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ varient. L'ensemble des mesures des grandeurs dérivées $\{X(\omega), x u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}\}$ forme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour le produit (loi intérieure) :

$$\text{si } X(\omega) = x u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} \text{ et } Y(\omega) = y u_1^{\beta_1} \dots u_n^{\beta_n} \text{ alors } XY(\omega) = xy u_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots u_n^{\alpha_n + \beta_n} \quad (0.294)$$

Les α_i sont appelées dimensions de la grandeur considérée. Une grandeur telle que $\alpha_i = 0 \forall i$ est dite sans dimension.

Exemple : un angle est une grandeur sans dimensions.

7.3 Changement de base et loi de transformation

Définition : Soient $\bar{u}_j$ p grandeurs dérivées d'unité $\bar{u}_j = \lambda_j u_1^{a_{1j}} \dots u_n^{a_{nj}}$, la matrice aux dimensions de ces grandeurs est la matrice de taille $np/$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \text{ où } i \in 1, n \text{ et } j \in 1, p \quad (0.295)$$

Proposition : une condition nécessaire et suffisante pour que les $\bar{u}_j$ forment une base de l'espace des mesures est que la matrice $\mathbf{A}$ soit inversible.

Démonstration :

Soient $X = x u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}$ et $X = \bar{x} \bar{u}_1^{\bar{\alpha}_1} \dots \bar{u}_p^{\bar{\alpha}_p}$ la représentation de la même mesure dans deux systèmes d'unités différents dont la matrice de passage donnée par la formule (0.295) est connue, alors on a :

$$X = \bar{x} \left(\lambda_1 u_1^{a_{11}} \dots u_n^{a_{n1}} \right)^{\bar{\alpha}_1} \dots \left(\lambda_p u_1^{a_{1p}} \dots u_n^{a_{np}} \right)^{\bar{\alpha}_p} \quad (0.296)$$

Ce qui s'écrit également :

$$X = \bar{x} \prod_{j=1}^p \left(\lambda_j \prod_{k=1}^n u_k^{a_{kj}} \right)^{\bar{\alpha}_j} \quad (0.297)$$

Ce qui permet de regrouper les facteurs de façon différente :

$$X = \bar{x} \prod_{j=1}^p \prod_{k=1}^n \lambda_j^{\bar{\alpha}_j} u_k^{a_{kj} \bar{\alpha}_j} \quad (0.298)$$

et

$$X = \bar{x} \prod_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^p \lambda_j^{\bar{x}_j} \right) \underbrace{\left(\prod_{j=1}^p u_k^{a_{kj} \bar{x}_j} \right)}_{\sum_{j=1}^p a_{kj} \bar{x}_j} \quad (0.299)$$

Ce qui donne :

$$X = \bar{x} \prod_{j=1}^p \lambda_j^{\bar{x}_j} \prod_{k=1}^n u_k^{\sum_{j=1}^p a_{kj} \bar{x}_j} \quad (0.300)$$

Or $X = x u_1^{x_1} \dots u_n^{x_n}$ et par unicité des composantes dans un espace vectoriel, on a :

$$x = \bar{x} \prod_{j=1}^p \lambda_j^{\bar{x}_j} \quad (0.301)$$

$$x_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} \bar{x}_k, j \in 1, n \quad (0.302)$$

On doit donc avoir une matrice inversible pour pouvoir exprimer $\bar{x}_k$ en fonction de x_j et donc $\bar{x}$ en fonction de x .

Exemple :

Est-ce que le triplet (viscosité, longueur, masse volumique) est un système d'unité susceptible de remplacer le triplet (masse, longueur et temps) usuellement utilisé ?

Pour répondre à cette question, écrivons la matrice aux dimensions :

Tableau 3: exemple de changement de système d'unité

	Viscosité	Longueur	Masse volumique
	μ	l	ρ
M	1	0	1
L	-1	1	-3
T	-1	0	0

Le déterminant de cette matrice est

$$Det = 0 + 0 + 0 + 1 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \quad (0.303)$$

Son inverse est obtenue à partir de la comatrice¹⁴ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underset{=1}{Det}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T}_{\text{comatrice}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.304)$$

Ce qui donne : $M = \rho l^3$; $L = l$; $T = \mu^{-1} \rho l^2$ (car on rappelle la matrice inverse est composée des vecteurs coordonnées de l'ancienne base donnée dans la nouvelle base et placé côte à côte en colonne).

¹⁴ On rappelle que la co-matrice est obtenue en calculant pour le terme (i,j) le déterminant en éliminant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne et en multipliant par $(-1)^{i+j}$

7.4 Théorème II de Vaschy-Buckingham

Soit une relation entre variable de la forme :

$$x_{p+1} = f(x_1, \dots, x_p) = f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{forme une base}}, x_{n+1}, \dots, x_p) \quad (0.305)$$

Alors par changement d'unité, on a :

$$\bar{x}_{p+1} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_p) \quad (0.306)$$

Et si on choisit $\bar{x}_1 \bar{u}_1, \dots, \bar{x}_n \bar{u}_n$ comme nouvelles unités, on a :

$$\bar{x}_{p+1} = f(1, \dots, 1, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_p) \quad (0.307)$$

Théorème (dit II) :

Soit une loi physique qui se traduit par $x_{p+1} = f(x_1, \dots, x_p)$ où $\bar{x}_1 \bar{u}_1, \dots, \bar{x}_n \bar{u}_n$ forme une base d'unité et le changement d'unités :

$$X_i = x_i \prod_{k=1}^n u_k^{a_{ki}}, i \in 1, n \quad (0.308)$$

$$X_l = x_l \prod_{j=1}^n u_j^{\alpha_{jl}}, l \in n+1, p \quad (0.309)$$

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ forme une nouvelle base d'unité i.e. la matrice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad (0.310)$$

est inversible. Alors dans la base $X_1, \dots, X_n$ avec $u_1, \dots, u_n$ comme nouvelles unités, on a :

$$\bar{x}_{p+1} = f(1, \dots, 1, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_p) \quad (0.311)$$

Où

$$\Pi_{x_l} = \bar{x}_l = \frac{x_l}{\prod_{j=1}^n u_j^{b_{jl}}}, l \in n+1, p \quad (0.312)$$

Avec b_{jl} solutions du système linéaire :

$$\alpha_{lj} = \sum_{m=1}^n a_{lm} b_{mj}, l \in 1, n, l \in n+1, p \quad (0.313)$$

i.e. ce sont les coefficients de la matrice aux dimensions des $X_{n+1}, \dots, X_p$ dans la nouvelle base.

N.B. : On a également utilisé Π_{x_l} la notation classique pour le groupement adimensionnel associé à la grandeur x_l , qui a donné son surnom au théorème de Vaschy-Buckingham.

7.5 Applications

7.5.1 Nouveau système d'unité international mis en vigueur au 20 mai 2019

A partir du 20 mai 2019, le système international d'unité a été entièrement refondu. Ceci est lié à une volonté d'améliorer la précision des mesures. En effet la masse d'un kg de Pt n'est pas réellement constante au cours du temps. Même sous atmosphère contrôlée une partie des atomes d'évaporent et il peut y avoir des dépôts (par adsorption). On a du mal à dépasser une précision de 10^{-8} . Or pour certaines applications (en recherche mais aussi pour le GPS par exemple) cela devient nécessaire. On a donc décider de remplacer toutes les grandeurs primitives par des grandeurs dérivées. Cependant pour que ces nouvelles grandeurs dérivées soient « inattaquables », on a choisi de prendre comme nouvelles unités les constantes fondamentales de la physique. Celle-ci ne seront

donc plus mesurées dorénavant mais leur valeur étant fixées (à leur valeur usuelle) on en déduira les grandeurs usuelles (comme le mètre) qui deviennent les nouvelles grandeurs dérivées. On peut donc voir que l'approche théorique développée ci-dessus possède de véritables répercussion dans le monde scientifique. Les nouvelles unités sont données dans le Tableau 4 :

Tableau 4: nouveau système international d'unité en vigueur au 20 mai 2019

Unité	Symbole	Définition
Kilogramme	kg	La constante de Planck $h=6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{kg}$ (i.e. J.s)
Mètre	m	Longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant $1/299792458$ secondes
Seconde	s	Durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de Césium 133
Ampère	A	On fixe la charge élémentaire à $e=1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ A.s}$ ($1\text{A.s} = 1\text{C}$)
Kelvin	K	On fixe la valeur de la constante de Boltzmann à $k=1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$ (J/K)
Mole	mol	On fixe la constante d'Avogadro à $N_A=6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Candela	cd	Intensité lumineuse dans une direction. Définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} hertz, K_{cd} , égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1} , unité égale à cd sr W^{-1}

Ces nouvelles définitions fondamentales (valeur des constantes de Planck, de Boltzmann et d'Avogadro, de la vitesse de la lumière...etc.) servent donc principalement à améliorer la précision des mesures. En pratique, on continue à utiliser le système M.K.S.A. (mètre-kilogramme-seconde-Ampère) pour faire l'analyse dimensionnelle car ces unités sont plus intuitives à utiliser.

7.5.2 Mise sans dimension de l'équation de Navier-Stokes

Pour l'instant, on a écrit l'équation de Navier Stokes sous forme classique dite dimensionnelle :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{accumulation locale de Q.D.M.}} + \underbrace{\rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}}_{\text{croisement des trajectoires et terme d'inertie}} = \underbrace{-\text{grad} p}_{\text{Effort de surface isotrope}} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{v}}_{\text{Effort de surface visqueux}} + \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{Effort volumique}} \quad (0.314)$$

Mais si l'on choisit de faire un changement d'unité par exemple en prenant ρ , V_0 et L comme nouvelles unités.

Tableau 5: mise sans dimension de l'équation de Navier-Stokes

	Vitesse	Longueur	Masse volumique
	V_0	l	ρ
M	0	0	1
L	1	1	-3
T	-1	0	0

Le déterminant de cette transformation est :

$$Det = 0 - 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = -1 \neq 0 \quad (0.315)$$

Et l'on peut définir les nouvelles grandeurs :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L/V_0}, \bar{P} = \frac{P}{\rho V_0^2}, \bar{V} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \frac{V}{V_0} \quad (0.316)$$

Et l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}} V_0}{\partial \bar{t} L/V_0} + \left(\bar{\mathbf{v}} V_0 \cdot \frac{\mathbf{grad}_{\bar{x}}}{L} \right) \bar{\mathbf{v}} V_0 \right) = - \frac{\mathbf{grad}_{\bar{x}}}{L} p + \mu \frac{\Delta_{\bar{x}}}{L^2} \bar{\mathbf{v}} V_0 \quad (0.317)$$

$$\text{div}(\bar{\mathbf{v}} V_0) = 0$$

En divisant par $\rho V_0^2 / L$ il vient :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{grad}_{\bar{x}}) \bar{\mathbf{v}} = - \mathbf{grad}_{\bar{x}} p + \frac{\mu}{\rho L V_0} \Delta_{\bar{x}} \bar{\mathbf{v}} \quad (0.318)$$

$$\text{div}_{\bar{x}}(\bar{\mathbf{v}}) = 0$$

Ce que l'on note,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{grad}) \bar{\mathbf{v}} = - \mathbf{grad} p + \frac{1}{\text{Re}_L} \Delta \bar{\mathbf{v}} \quad (0.319)$$

$$\text{div}(\bar{\mathbf{v}}) = 0$$

Et l'on laisse souvent tomber la notation avec des sur-barres (par abus de langage)

7.5.3 Coefficient de trainée

La force exercée sur un obstacle de dimension D par un fluide en écoulement est donnée par une relation du type :

$$f = f(\rho, U, D, c, \nu) \quad (0.320)$$

Où c est la célérité du son dans le liquide. Par analyse dimensionnelle, il vient :

Tableau 6: analyse dimensionnelle du coefficient de trainée

	ρ	U	D	c	ν	f
M	1	0	0	0	0	1
L	-3	1	1	1	2	1
T	0	1	0	-1	-1	-2

Le triplet (ρ, U, D) forme une base d'unité puisque le déterminant de la transformation vaut :

$$\text{Det} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0 \quad (0.321)$$

Par application du théorème de Vaschy-Buckingham, il vient :

$$\Pi_f = \frac{f}{\rho U^2 D} = f(1, 1, 1, Ma, \text{Re}_L) \quad (0.322)$$

Où

$$\Pi_c = \frac{1}{Ma} = \frac{c}{U} \quad (0.323)$$

Et

$$\Pi_\nu = \frac{1}{\text{Re}_L} = \frac{\nu}{UL} \quad (0.324)$$

Ce qui donne au final

$$f = \rho U^2 D \bar{f}(\text{Re}_L) \quad (0.325)$$

Ce que l'on note usuellement,

$$f = \rho U^2 S C_x(\text{Re}_L) \quad (0.326)$$

En introduisant S le maître-couple i.e. la surface projetée dans la direction du déplacement. C_x est appelé coefficient de pénétration de l'air ou coefficient de trainée.

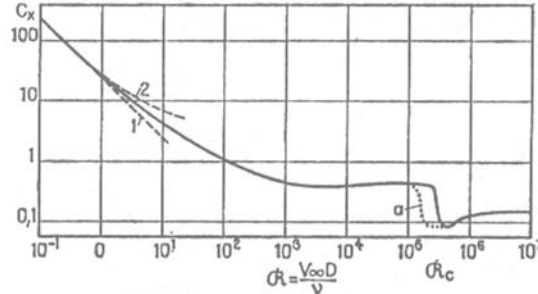


Figure 61: coefficient de trainée pour une sphère. (a) coefficient de trainée pour une sphère rugueuse (balle de golf).

La Figure 61 montre l'évolution du coefficient de trainée d'un sphère en fonction du nombre de Reynolds. On remarque que ce coefficient tend vers une valeur constante à grand nombre de Reynolds. On remarque également une transition entre deux valeurs de cette constante : c'est ce que l'on appelle « la crise de trainée ». Elle correspond vraisemblablement à une transition dans la structure de la turbulence autour de la sphère. Bien que ce phénomène ne soit pas encore très bien compris (comme la turbulence en général), on peut utiliser le fait que la transition ait lieu plus tôt pour une sphère rugueuse pour améliorer la portée (i.e. diminuer la trainée) des balles de golf en plaçant des marques sur ces dernières qui facilitent le changement de régime (c'est la raison pour laquelle les balles de golf ne sont pas lisses).

8 Bibliographie

Celle-ci n'est pas exhaustive mais voici la liste des ouvrages qui m'ont permis de mettre ce cours au point :

8.1 Mécanique des fluides en français :

Comolet *Mécanique expérimentale des fluides (T1-2)*

Il présente très pédagogiquement les bases. Il n'a d'« expérimentale » que le nom, le Tome 1 étant assez théorique (mais pas trop). Bien qu'assez ancien, c'est une référence incontournable en français qui contient cependant encore quelques coquilles.

Hulin Petit Guyon *Hydrodynamique Physique*

Comme son nom l'indique très physique. J'en recommande très fortement la lecture. Pour une fois qu'un ouvrage en français surpasse de loin les ouvrages en langue étrangère (il a par ailleurs été traduit)

Candel *Mécanique des fluides*

C'est une référence même si certaines notations sont différentes de celles utilisées dans le présent cours. Le théorème de transport d'intégrale est présenté un peu différemment mais c'est bien sûr équivalent et sa lecture est donc fortement complémentaire. Personnellement je recommande fortement la lecture de cette ouvrage pour son introduction aux écoulements compressibles et à la couche limite. C'est donc plutôt un ouvrage qui correspond à la deuxième année ENSEM.

8.2 Compléments :

Rimbert *Rappels et compléments de mécanique générale* ENSEM (disponible sur ARCHE)

Purcell *Cours de physique de l'université de Berkeley Tome 2 Electromagnétisme*

Pour la construction des opérateurs div et rot par leur propriété comme présenté dans le présent texte.

Reif *Cours de physique de l'université de Berkeley Tome 5 Physique statistique*

Pour la théorie cinétique et la viscosité des gaz.

8.3 Remerciements

Bien qu'il ne soit pas possible de les citer à travers leurs ouvrages (à ma connaissance), ce cours doit beaucoup aux enseignements dispensés en classe préparatoire au lycée H. Loritz à Nancy par M^r Marchal, à l'Ecole Centrale de Lyon par le professeur F. Sidoroff et à l'ENSEM par le Dr. Olivier Séro-Guillaume, Directeur de Recherche au CNRS.