

Equation générale de la dynamique des gaz

- Champ de vitesse $\vec{V}$ dans un repère cartésien (x_1, x_2, x_3)

$$\vec{V} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

- Champ de pression : p
- Force d'action à distance F (par ex. gravité)
- Energie interne par unité de mass (e). Dans le cas d'un gaz parfait, $e=C_v T$
- Conductivité thermique du milieu : λ_c

Remarque : dans le cas d'un gaz, le gravité est très souvent négligée, soit $F=0$.

Equation de continuité (conservation de la matière)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{Ecoulements stationnaires} \rightarrow \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{Ecoulements stationnaires} \rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Equation du mouvement (Navier Stokes)

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}}_{\text{Forces d'inertie par unité de volume}} = \underbrace{\rho \vec{F}}_{\text{Forces à distance}} + \underbrace{\underbrace{-\overrightarrow{\operatorname{grad} p}}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{V}}_{\text{Forces de viscosité}}}_{\text{Forces de contact}}$$

Forces extérieures par unité de volume

$$\underbrace{\rho \frac{dU_i}{dt}}_{\text{Forces d'inertie par unité de volume}} = \underbrace{\rho F_i}_{\text{Forces à distance}} + \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i}_{\text{Forces de contact}}$$

Forces extérieures par unité de volume

Cas d'un fluide parfait : équation d'Euler

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p \quad \text{ou} \quad \rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i \quad = \text{Equation d'Euler}$$

Equation de l'énergie cinétique

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{V}^2}{dt}}_{\text{Variation d'énergie cinétique/unité de masse}} = \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \vec{F} - \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p - \mu \vec{V} \cdot \Delta \vec{V}}_{\text{Travaux des forces extérieures/unité de masse}}$$

Cas d'un fluide parfait (pas de forces de viscosité)

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{V}^2}{dt}}_{\text{Variation d'énergie cinétique/unité de masse}} = \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \vec{F} - \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p}_{\text{Travaux des forces extérieures/unité de masse}}$$

Equation de l'énergie interne (bilan de puissance/unité de masse)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\underbrace{e}_{\text{Energie interne}} + \underbrace{\frac{U_i U_i}{2}}_{\text{Energie cinétique}} \right) = \underbrace{\rho U_i F_i - \frac{\partial(p U_i)}{\partial x_i}}_A + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[U_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right]}_B + \underbrace{\lambda_c \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}}_C$$

- A, B : puissance mécaniques échangées vers l'extérieurs
- C : puissance thermique échangée vers l'extérieur

La loi de Fourier donne la densité de flux thermique par conduction

$$\vec{q}_c = -\lambda_c \overrightarrow{\text{grad} T}$$

Pour un fluide parfait et un système calorifiquement isolé

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{U_i U_i}{2} \right) = \rho U_i F_i - \frac{\partial(p U_i)}{\partial x_i}$$