

Chapitre 4 : Détente de Prandtl Meyer

Lien entre rotationnel et entropie

Transformons l'équation du mouvement (**Equation d'Euler**) :

De $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{V}^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$, il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} H = -\vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p \text{ sachant que : } \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} H$$

De plus :

$$dH = TdS + \frac{1}{\rho} dp \text{ ce est équivalent à : } \overrightarrow{\text{grad}} H = T \overrightarrow{\text{grad}} S + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{\text{grad}} H = -\vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = T \overrightarrow{\text{grad}} S + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{ce qui conduit à : } T \overrightarrow{\text{grad}} S = -\vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V}$$

Cas des écoulements irrationnels

Dans ce cas $\text{rot} \vec{V} = \vec{0}$, ce qui implique que :

- L'entropie S est constante dans tout l'espace (soit $dH = \frac{1}{\rho} dp$)
- p n'est fonction que de ρ , la masse volumique et pour les gaz parfaits on adoptera une équation de Poisson : $p = k \rho^\gamma$
- $\vec{V}$ dérive d'un potentiel des vitesses, c'est à dire qu'il existe fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ tel que : $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ (cette propriété ne sera pas utilisée directement dans le cadre de ce cours).

$$\text{L'équation de Bernoulli } H + \frac{V^2}{2} = H_i \text{ donne : } dH + \vec{V} \cdot d\vec{V} = 0$$

$$\text{Or } dH = \frac{dp}{\rho} \text{ et } c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\frac{dp}{\rho} + \vec{V} \cdot d\vec{V} = 0$$

$$\text{Sachant que } p \text{ ne dépend que de } \rho (dS = 0) : dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = c^2 d\rho, \text{ on a ainsi :}$$

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} + \vec{V} \cdot d\vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ce qui est équivalent à écrire : } \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \rho = -\frac{1}{2c^2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 \quad (2)$$

De plus, l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \text{ ou encore : } \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0 \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) permettent d'écrire :

$$\rho \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi) - \frac{1}{2c^2} \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] = 0$$

En notant les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ de la façon suivante : $\vec{V} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}$, et en

développant l'équation précédente :

$$\left(c^2 - U_1^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \left(c^2 - U_2^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \left(c^2 - U_3^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - 2U_1 U_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - 2U_2 U_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} - 2U_1 U_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

(4)

Il s'agit ainsi d'une équation aux dérivées partielles en Φ , car c^2 s'exprime en fonction de $\vec{V}$ (qui s'exprime en fonction de Φ).

En effet : $c^2 = (\gamma - 1)H$ et $H + \frac{V^2}{2} = H_i = \text{cte}$.

Ainsi tout écoulement stationnaire et irrotationnel est solution de (4) et réciproquement.

Écoulements plans isentropiques supersoniques : détente de Prandtl-Meyer

Un écoulement sera dit « plan », si par un choix judicieux des axes de coordonnées, toutes les grandeurs relatives au fluide ne dépendent que des coordonnées (x, y) .

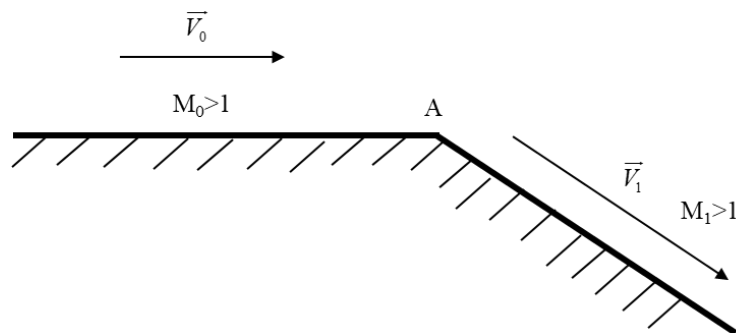
Pour ce type d'écoulements, le potentiel des vitesses est solution de l'équation :

$$\left(c^2 - u^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(c^2 - v^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2uv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Nous ferons de plus l'hypothèse d'un écoulement supersonique, c'est à dire :

$$q^2 = u^2 + v^2 \succ c^2$$

Exemple de détente de Prandtl-Meyer



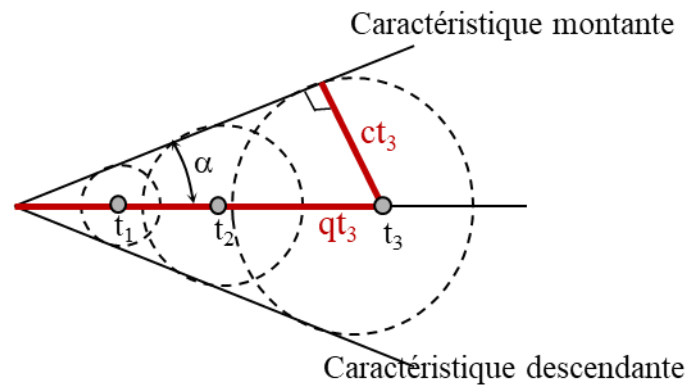
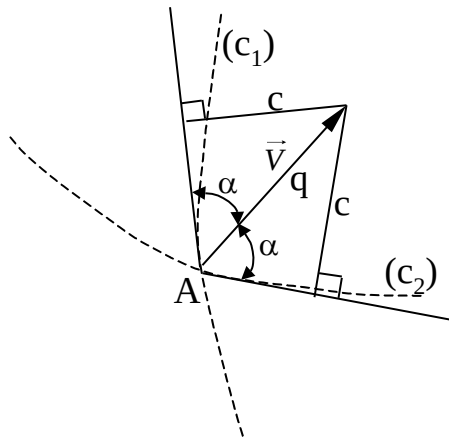
Définition d'une caractéristique ?

On se place dans le plan (x, y) . Soit un écoulement supersonique dans ce plan. On appelle « caractéristique » de cet écoulement les courbes le long desquelles la composante normale de la vitesse est égale à la célérité locale du son.

Si $\vec{V}$ est le vecteur vitesse en un point A, les caractéristiques passant par A sont donc les courbes tangentes à l'une ou à l'autre des droites faisant avec $\vec{V}$ un angle α défini par :

$$\sin \alpha = \frac{c}{q} = \frac{1}{M}$$

α est appelé l'angle de Mach au point A.



$$\sin \alpha = \frac{ct_1}{qt_1} = \frac{ct_2}{qt_2} = \frac{ct_3}{qt_3} = \frac{1}{M}$$

➤ Il y a deux types de caractéristiques :

(C₁) que l'on nommera « montantes »

(C₂) que l'on nommera « descendantes »

Ainsi une caractéristique correspond à une ligne sur-laquelle se propage une perturbation élémentaire (variation élémentaire de pression) en écoulement supersonique.

Equations des caractéristiques

Soit dx et dy , les composantes d'un déplacement élémentaire le long d'une caractéristique. La normale unitaire à celui ci sera définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \begin{vmatrix} -dy \\ dx \end{vmatrix}$$

Sur une caractéristique, $(\vec{V} \cdot \vec{n})^2 = c^2$

si bien que : $\frac{(vdx - udy)^2}{dx^2 + dy^2} = c^2$

ou encore : $(c^2 - u^2)dy^2 + 2uvdx dy + (c^2 - v^2)dx^2 = 0$ (5)

Si u et v sont connus, on peut obtenir par intégration de cette équation les caractéristiques dans le plan (x,y) .

Equation des caractéristiques

On rappelle l'équation (5) : $(c^2 - u^2)dy^2 + 2uvdx dy + (c^2 - v^2)dx^2 = 0$

qui est valable quelque soit le déplacement dx , dy le long des caractéristiques.

Il y a donc deux types de solution à cette équation :

$$dy = \lambda_1 dx \quad \text{et} \quad dy = \lambda_2 dx$$

λ_1 et λ_2 sont alors les racines de l'équation :

$$(c^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (c^2 - v^2) = 0$$
 (6)

On remarquera bien sur que λ_1 et λ_2 sont des fonctions de u et v .

La somme des racines est donné par : $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-uv}{(c^2 - u^2)}$

et le produit des racines par : $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(c^2 - v^2)}{(c^2 - u^2)}$

si bien que l'équation des potentiels, $(c^2 - u^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (c^2 - v^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2uv\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$, s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

ou bien encore :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y}}_{[1]} + \lambda_2 \underbrace{\left(\lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{[2]} = 0$$

Ainsi, le long d'une caractéristique (C_I) :

$$dy = \lambda_1 dx$$

Or $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{[1]} dx$

$$\text{et : } dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\boxed{2}} dx$$

On a donc, le long d'une caractéristique (C_1) :

$$du + \lambda_2 dv = 0$$

et par un raisonnement analogue, le long d'une caractéristique (C_2) :

$$du + \lambda_1 dv = 0$$

L'équation des caractéristique dans le système de coordonnées (u,v) peut être déterminée par intégration de :

$$(c^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (c^2 - v^2) = 0$$

$$\text{de plus : } \lambda = -\frac{du}{dv}$$

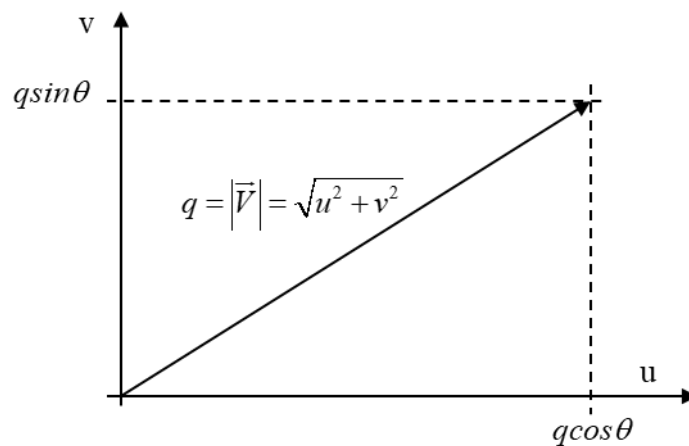
$$\text{ce qui conduit à : } (c^2 - u^2)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - 2uv\left(\frac{du}{dv}\right) + (c^2 - v^2) = 0$$

$$\text{ou encore } (c^2 - u^2)du^2 - 2uvdudv + (c^2 - v^2)dv^2 = 0$$

$$\text{qui s'écrit aussi : } c^2(du^2 + dv^2) = (udu + vdv)^2 = (\vec{V} \cdot d\vec{V})^2$$

En introduisant le module de la vitesse $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ et l'angle $\theta = \arctg\left(\frac{v}{u}\right)$,

le couple (q, θ) correspond coordonnées polaires dans le plan (u,v).



Les composantes du vecteur vitesse s'expriment alors par :

$$U = q \cos \theta \quad \text{et} \quad V = q \sin \theta$$

En conservant les notations précédentes, on a : $du = dq \cos \theta - q \sin \theta d\theta = dq \cos \theta - V d\theta$,
 $dv = dq \sin \theta + q \cos \theta d\theta = dq \sin \theta + U d\theta$ et $\vec{V} \cdot d\vec{V} = q dq$.

Ainsi, $c^2 (du^2 + dv^2) = (udu + vdv)^2 = (\vec{V} \cdot d\vec{V})^2$ qui correspond à l'équation des caractéristiques dans le plan (u,v) , s'écrira :

$$\boxed{c^2 (dq^2 + q^2 d\theta^2) = q^2 dq^2}$$

qui équivaut à : $d\theta^2 = -\frac{dq^2}{q^2} + \frac{q^2}{c^2} \frac{dq^2}{q^2} = \frac{dq^2}{q^2} (M^2 - 1)$.

Ainsi : $d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}$

Introduisons le nombre de Mach M :

$$q = cM \quad \text{soit : } \ln q = \ln M + \ln c$$

En passant à la différentielle : $\frac{dq}{q} = \frac{dM}{M} + \frac{dc}{c}$

Introduisons le rapport des températures :

$$\frac{c}{c_i} = \left(\frac{T}{T_i} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \quad \text{soit : } c = c_i \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2}$$

$$\text{Evaluons ainsi : } \frac{dc}{c} = -M \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} dM$$

$$\text{Calculons ensuite } \frac{dq}{q} : \quad \frac{dq}{q} = \frac{dM}{M} + \frac{dc}{c}$$

$$\text{soit : } \frac{dq}{q} = \left[\frac{1}{M} - M \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right] dM$$

soit après développement et simplifications :

$$\boxed{\frac{dq}{q} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}}$$

Utilisons l'équation de la caractéristique $d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}$ en ne conservant que la solution positive (la solution négative se déduisant de même)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = \omega(M)$$

soit encore : $\theta_2 - \theta_1 = \omega(M_2) - \omega(M_1)$

avec ω la fonction de Prandtl-Meyer définie par : $\omega(M) = \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$

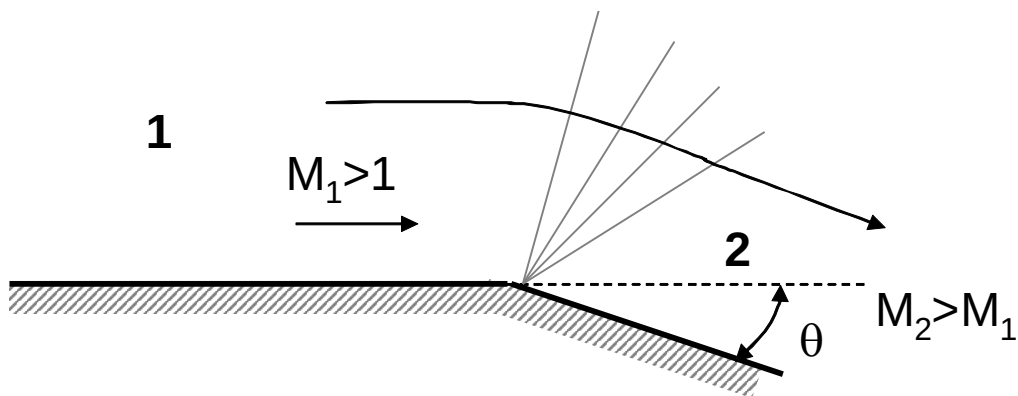
Remarque : si on avait pris l'équation $d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}$, on aurait :

$$\theta_2 - \theta_1 = \omega(M_1) - \omega(M_2)$$

En intégrant l'équation précédente, et en utilisant la condition $M=1$, $\omega=0$, il vient :

$$\omega(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \right) - \arctg \left(\sqrt{M^2 - 1} \right)$$

Si $\theta_1 = 0$, on alors : $\theta_2 = \omega(M_2) - \omega(M_1)$



M_1 et θ_2 étant connus, M_2 peut être déterminé à l'aide des tables, tel que : $\omega(M_2) = \theta_2 + \omega(M_1)$

Exemple :

$M_1=2$ et $\theta=15^\circ$

D'après les tables, $\omega(M_1)=26,38^\circ$ ce qui conduit à : $\omega(M_2) = \theta + \omega(M_1)=41,38^\circ$.

D'après les tables, le Mach M_2 est donc de l'ordre de 2,595.

Nombre de Mach

$\omega(M)$

Angle
de Mach

M	$\omega = \frac{p}{p_1}$	$R = \frac{\rho}{\rho_1}$	$\Theta = \frac{T}{T_1}$	$\Sigma = \frac{A}{A_c}$	ω	$\mu = \frac{V}{V_1}$
1.90	.14924E 00	.25699E 00	.58072E 00	.15553E 01	23.586	31.76
1.91	.14695E 00	.25417E 00	.57816E 00	.15677E 01	23.869	31.57
1.92	.14470E 00	.25138E 00	.57561E 00	.15804E 01	24.151	31.39
1.93	.14247E 00	.24861E 00	.57307E 00	.15932E 01	24.432	31.21
1.94	.14028E 00	.24588E 00	.57054E 00	.16062E 01	24.712	31.03
1.95	.13813E 00	.24317E 00	.56802E 00	.16193E 01	24.992	30.85
1.96	.13600E 00	.24049E 00	.56551E 00	.16326E 01	25.271	30.68
1.97	.13390E 00	.23784E 00	.56301E 00	.16461E 01	25.549	30.51
1.98	.13184E 00	.23521E 00	.56051E 00	.16597E 01	25.827	30.33
1.99	.12981E 00	.23262E 00	.55803E 00	.16735E 01	26.104	30.17
2.00	.12780E 00	.23005E 00	.55556E 00	.16875E 01	26.380	30.00
2.01	.12583E 00	.22751E 00	.55309E 00	.17016E 01	26.655	29.84
2.02	.12389E 00	.22499E 00	.55064E 00	.17160E 01	26.930	29.67
2.03	.12197E 00	.22250E 00	.54819E 00	.17305E 01	27.203	29.51
2.04	.12009E 00	.22004E 00	.54576E 00	.17451E 01	27.476	29.35
2.05	.11823E 00	.21760E 00	.54333E 00	.17600E 01	27.748	29.20
2.06	.11640E 00	.21519E 00	.54091E 00	.17750E 01	28.020	29.04
2.07	.11460E 00	.21281E 00	.53851E 00	.17902E 01	28.290	28.89
2.08	.11282E 00	.21045E 00	.53611E 00	.18056E 01	28.560	28.74
2.09	.11107E 00	.20811E 00	.53373E 00	.18212E 01	28.829	28.59
2.10	.10935E 00	.20580E 00	.53135E 00	.18369E 01	29.097	28.44
2.11	.10766E 00	.20352E 00	.52898E 00	.18529E 01	29.364	28.29
2.12	.10599E 00	.20126E 00	.52663E 00	.18690E 01	29.631	28.14
2.13	.10434E 00	.19902E 00	.52428E 00	.18853E 01	29.896	28.00
2.14	.10273E 00	.19681E 00	.52194E 00	.19018E 01	30.161	27.86
2.15	.10113E 00	.19463E 00	.51962E 00	.19185E 01	30.425	27.72
2.16	.99562E-01	.19247E 00	.51730E 00	.19354E 01	30.688	27.58
2.17	.98017E-01	.19033E 00	.51499E 00	.19525E 01	30.951	27.44
2.18	.96495E-01	.18821E 00	.51269E 00	.19698E 01	31.212	27.30
2.19	.94997E-01	.18612E 00	.51041E 00	.19873E 01	31.473	27.17

(Table du dessus)

(Table du dessous)

Extrait de la table isentropique

Déviati3n maximale d'un écoulement

La fonction de Prandtl-Meyer est nulle lorsque le nombre de Mach M vaut 1 :

$$\omega(1) = 0$$

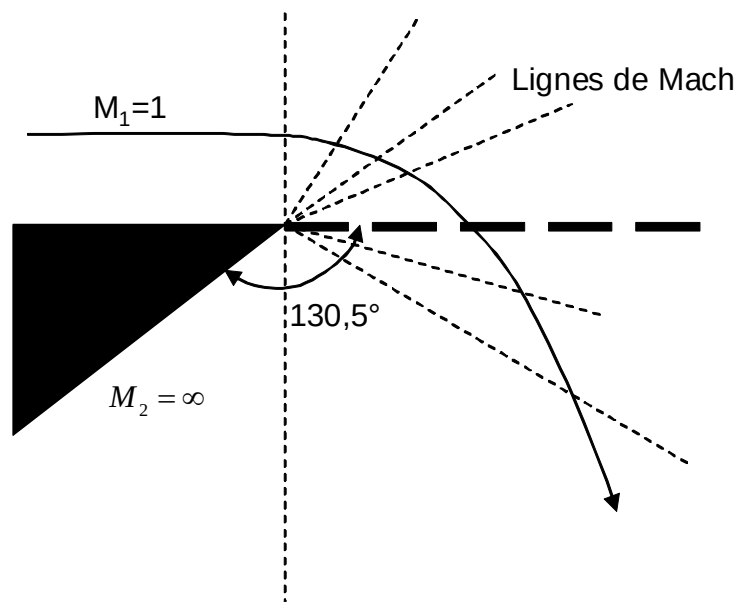
et g est une fonction croissante du nombre de Mach : $\omega(M = \infty) \approx 130,5^\circ$

Ainsi, dans le cas de lignes caractéristiques montantes, la déviation maximale de l'écoulement sera donnée par :

$$(\theta_2 - \theta_1)_{\max} = \omega_2(M_2 = \infty) - \omega_1(M_1 = 1) \approx 130,5^\circ$$

Ainsi, deux cas peuvent se présenter :

- 1- L'angle du dièdre est exactement $180-130,5^\circ$: dans ce cas, la température, la pression et la masse volumique deviennent nulles sur le dièdre.



- 2- Si l'angle de dièdre est plus petit que $180-130,5^\circ$, il existe une ligne telle que la pression, la température et la masse volumique sont nulles. Entre cette ligne et le dièdre, s'installe le vide.

