

TD1 : Topologie des espaces métriques

1. QUELQUES EXERCICES EN DIMENSION 1 OU 2

Exercice 1. Déterminez si chacun des ensembles suivants est ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre dans $\mathbb{R} : [0, 1],]1, +\infty[, \{x \in \mathbb{R}/0 \leq \sin(x) < 1/2\}$ et $\{x \in \mathbb{R}/0 < \sin(x) \leq 1\}$.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne usuelle. On pose $N = (0, 1)$. Pour chacun des ensemble suivants, déterminez s'il est ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre :

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} ; \mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \text{ avec } N = (0, 1)$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y < 1\} ; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}.$$

Exercice 3. Sur $\mathbb{S}^1$, on définit les deux fonctions suivantes : pour $P, Q \in \mathbb{S}^1$, on pose

$$d(P, Q) := \|P - Q\|_2 \text{ et } \delta(P, Q) = |\theta|$$

où $\theta \in [-\pi, \pi]$ est tel que $\rho_\theta(P) = Q$.

- (1) Montrez que ce sont des distances.
- (2) (pour les MFAs) Montrez qu'elles définissent les même ouverts.

Exercice 4. On reprend les exercices des questions précédentes. Montrez que pour tout $P \in \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$, il existe un unique $x_P \in \mathbb{R}$ tel que $(MN) \cap \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \{(x_P, 0)\}$. On définit alors $\pi : \mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\pi(P) = x_P$. Montrez que π est un homéomorphisme lorsque $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ est muni de d ou δ .

2. GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES MÉTRIQUES

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r > 0$. Montrez que $B(x, r)$ est un ouvert et que $\bar{B}(x, r)$ est un fermé.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Montrez que

$$\bar{A} = \{x \in X / \exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \text{ converge vers } x\}.$$

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subset X$. Montrez que $(\bar{A})^c = \text{Int}(A^c)$ et $(\text{Int}(A))^c = \bar{A}^c$.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subset X$. Montrez que $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A .

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrez que $\overline{B(x, r)} = \bar{B}(x, r)$ et $\text{Int}(\bar{B}(x, r)) = B(x, r)$. Donnez un contre-exemple dans le cas d'un espace métrique bien choisi. Indication : on pensera à un espace discret.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subset X$. Montrez que A est ouvert ssi $\text{Int}(A) = A$. Montrez que A est fermé ssi $\bar{A} = A$.

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique. Montrez les propriétés suivantes :

- (1) $\emptyset$ et X sont des ouverts ;
- (2) toute union d'ouverts est un ouvert ;

(3) toute intersection finie d'un ouvert est un ouvert.

Exercice 12. Montrez que le produit de deux espaces métriques compacts est compact (muni d'une distance naturelle bien choisie).

Exercice 13. Soit X un ensemble et soient d_1, d_2 deux distances sur X . On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $c^{-1}d_1 \leq d_2 \leq cd_1$. Montrez que ces distances définissent les mêmes ouverts.

3. FONCTIONS CONTINUES

Exercice 14. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$. Soit $x \in X$. Montrez l'équivalence des deux assertions suivantes :

- (1) f est continue en x ;
- (2) Pour toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x , alors $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

Exercice 15. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection continue. On suppose que X est compact. Montrez que f est un homéomorphisme.

Exercice 16. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$. Montrez l'équivalence des propositions suivantes :

- (1) f est continue ;
- (2) l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X .

Exercice 17. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Pour $f, g \in C^0(X, Y)$, on définit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Montrez que si X est compact non-vide, alors d est une distance sur $C^0(X, Y)$.

Exercice 18. Soient (X, d_X) un espace métrique compact non-vide et $(Y, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour $f \in C^0(X, Y)$, on définit $N(f) := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$. Montrez que $C^0(X, Y)$ est un espace vectoriel, et que N est une norme sur cet espace.

4. MINIMISATION

Exercice 19. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A \subset X$ un ensemble non vide. Pour $x \in X$, on définit

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) / a \in A\}.$$

On définit alors $f(x) = d(x, A)$.

- (1) Montrez que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (on pourra montrer qu'elle est 1-Lipschitzienne).
- (2) Pour $x \in A$, montrez que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Exercice 20. On se donne une norme $\|\cdot\|$ sur $E := C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mu_n := \inf\{\|f - P\| / P \in \mathbb{R}_n[X]\}.$$

Montrez qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\mu_n = \|f - P_n\|$. Dans le cas $f \mapsto \|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p dx)^{1/p}$ avec $p = 1$ ou $p = 2$, montrez que P_n est unique. A-t-on unicité avec $\|\cdot\|_\infty$?