

TD2 : Théorèmes de point fixe

1. DISTANCE SUR UN PRODUIT

Exercice 1. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Sur le produit $X \times Y$, on définit

$$\begin{aligned} d : (X \times Y)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto d_X(x, x') + d_Y(y, y') \end{aligned}$$

Pour toutes les questions de cet exercice, on pourra commencer par prendre X et Y des espaces vectoriels normés (et même $\mathbb{R}$) munis des distances associées aux normes respectives.

- (1) Montrez que d est une distance sur $X \times Y$.
- (2) Soit $A \subset X \times Y$ tel que $A \neq \emptyset$. Montrez que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - A est ouvert pour la topologie de $(X \times Y, d)$;
 - Pour tout $(x, y) \in A$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que

$$(x, y) \in U \times V \subset A.$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{d} : (X \times Y)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2} \end{aligned}$$

- (3) Montrez que $\tilde{d}$ est une distance sur $X \times Y$.
 - (4) Soit $A \subset X \times Y$ tel que $A \neq \emptyset$. Montrez que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - A est ouvert pour la topologie de $(X \times Y, \tilde{d})$;
 - Pour tout $(x, y) \in A$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que
- $$(x, y) \in U \times V \subset A.$$
- (5) Montrez que, dans $X \times Y$, les ouverts pour d sont exactement les ouverts pour $\tilde{d}$.

2. POINTS FIXES ATTRACTIFS ET RÉPULSIFS

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow I$. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ point fixe de f . On note

$$A := \{(x_n)_n / x_n \in I \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que

- α est attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite $(x_n)_n \in A$ telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n_0} - \alpha| < \delta$, alors (x_n) converge vers α .
- α est répulsif si pour toute suite $(x_n)_n \in A$ qui converge vers α , alors (x_n) stationne en α .

1. On suppose que f est C^1 et que $|f'(\alpha)| < 1$. Montrez que α est attractif.
2. On suppose que f est C^1 et que $|f'(\alpha)| > 1$. Montrez que α est répulsif.
3. Montrez que si f est C^1 et que $|f'(\alpha)| = 1$, alors tout peut se produire.
4. Généralisez à $f : U \rightarrow U$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

3. MÉTHODE DE NEWTON

Soit $[a, b]$ un intervalle compact non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . On suppose que :

- (1) Il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$,
- (2) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

On pose alors

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

1. Déterminez F' .

2. Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $z \in [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon] \subset [a, b]$, alors la suite $(x_n)_n$ définie par $\{x_0 = z; x_{n+1} = F(x_n) \text{ pour tout } n\}$ est bien définie et converge vers α .

3. On suppose que f est C^3 . Montrez que, quitte à prendre $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $K > 0$ tel que pour tout $z \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$, la suite (x_n) définie au 2. vérifie

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K|x_n - \alpha|^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déduisez-en alors que $K|x_n - \alpha| \leq (K|z - \alpha|)^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette convergence est-elle intéressante ? Étendez ce résultat au cas $f \in C^2([a, b])$.

4. Généralisez à $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

4. CONTINUITÉ DES POINTS FIXES EN FONCTION D'UN PARAMÈTRE

Soit (X, d) un espace métrique complet. On se donne $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ une fonction. On suppose que

- F est continue (on a muni $[0, 1]$ de la valeur absolue, et $[0, 1] \times X$ de la distance de l'exercice 1)
- Il existe $k \in]0, 1[$ tel que $F(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$ est k -Lipschitzienne pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Il suit alors du Théorème du point fixe que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, il existe un unique $x_\lambda \in X$ point fixe pour $F(\lambda, \cdot)$.

1. Montrez que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue. On pourra commencer par supposer que $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ est Lipschitzienne.

2. Généralisation. On se donne (Λ, δ) un espace métrique et $F : \Lambda \times X \rightarrow X$ telle que : (i) F est continue et (ii) il existe $k \in]0, 1[$ tel que $F(\lambda, \cdot) : X \rightarrow X$ est k -Lipschitzienne pour tout $\lambda \in \Lambda$. Montrez que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue, où x_λ est l'unique point fixe de $F(\lambda, \cdot)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.