

Devoir 3 à rendre le 8 octobre

1. EXERCICES POUR (IMSD) ET (MFA)

Exercice 1. Soient $A, B \subset E$ un evn tels que

- A, B non vides,
- A est fermé et B est compact
- $A \cap B = \emptyset$

On montre ici de façon séquentielle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|a - b\| \geq \delta$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.

- Montrez que si la conclusion est fausse, alors il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_n \in A$ et $b_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Concluez en utilisant les propriétés de A et B .

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$ au sens

$$\forall A > 0, \exists R > 0 \text{ tel que } \forall x \in E \{ \|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > A \}.$$

Montrez alors que φ admet un minimum sur E .

Note : Ce résultat sera généralisé à la dimension infinie pour des fonctions convexes sur des Hilbert.

2. DISTANCE ENTRE DEUX ENSEMBLES (IMSD)

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble non-vide $A \subset X$ est borné si :

$$\exists M \geq 0 \text{ et } \exists x_0 \in X \text{ tels que } d(x, x_0) \leq M \text{ pour tout } x \in A.$$

1. Soit $A \subset X$ non-vide. Montrez que

$$A \text{ est borné ssi } \{ \forall x_0 \in X, \exists M \geq 0 \text{ tel que } d(x, x_0) \leq M \text{ pour tout } x \in A. \}$$

On note $\mathcal{P}_b(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X bornés et non-vides. Pour $A, B \in \mathcal{P}_b(X)$,

$$\delta_1(A, B) = \sup\{d(a, B) / a \in A\}, \text{ avec } d(a, B) \text{ défini dans TD1, exo 19.}$$

2. Montrez que $\delta_1(A, B) < \infty$ pour tous $A, B \in \mathcal{P}_b(X)$.

3. Soient $A, B \in \mathcal{P}_b(X)$. On suppose que $\delta_1(A, B) = 0$. Montrez alors que $B \subset \bar{A}$.

On définit

$$\delta(A, B) := \max\{\delta_1(A, B); \delta_1(B, A)\} \text{ pour } A, B \in \mathcal{P}_b(X).$$

4. Montrez que δ est symétrique.

5. Quand a-t'on $\delta(A, B) = 0$?

6. Montrez que δ vérifie l'inégalité triangulaire. On pourra utiliser les résultats de l'Exercice 19 du TD1 (question délicate).

7. Sur quel sous-ensemble de $\mathcal{P}_b(X)$ la fonction δ est-elle une distance ?

3. LE COMPACTIFIÉ D'ALEXANDROV (MFA)

Exercice 4 (Existence). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé localement compact (cad tout point admet un voisinage compact), mais non compact. On se donne un point $\omega \notin X$ et on pose $\hat{X} := X \cup \{\omega\}$. Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble de $\hat{X}$: on dit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\hat{X}$ si

- (1) Soit $\mathcal{O} = \emptyset$,
 - (2) Soit $\mathcal{O}$ est un ouvert de X ,
 - (3) Soit il existe $K \subset X$ compact tel que $\mathcal{O} = (X \setminus K) \cup \{\omega\}$.
- Montrez que ceci définit une topologie sur $\hat{X}$
 - Montrez que, muni de cette topologie, $\hat{X}$ est compact. On dit que $\hat{X}$ est le compactifié d'Alexandrov de X .
 - Montrez que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$ peut être assimilé au cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (Unicité). On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice précédent. On se donne un espace topologique $(Y, \mathcal{T}_Y)$ et $i : X \rightarrow Y$ tels que

- Y est compact
- $Y \setminus i(X)$ est réduit à un point, noté p ,
- $i : X \rightarrow Y \setminus \{p\}$ induit un homéomorphisme.

Montrez que i se prolonge en un homéomorphisme $\hat{X} \rightarrow Y$ qui envoie ω sur p . C'est en cela qu'on a unicité du compactifié d'Alexandrov.