

Devoir 4 : à rendre le 19 octobre

Exercice 1. Montrez que tout sous-espace de dimension finie d'un evn est complet.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $\varphi \in E^* = L(E, \mathbb{R})$ une application linéaire. Montrez que

$$\varphi \in E' \text{ (c-à-d continue)} \Leftrightarrow \text{Ker } \varphi \text{ est fermé.}$$

Indication : on pourra montrer que si φ n'est pas continue, alors il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n) \rightarrow 0$, $\varphi(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et raisonner sur $(x_n - x_0)_n$.

Exercice 3. En utilisant uniquement que toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente, montrez que $[-1, 1]^2$ est compact, puis que $[-1, 1]^n$ est compact pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4 (IMSD). Rédigez l'exercice qui vous a été indiqué lors de la dernière séance de TD.