

TD5 : Lemme de Baire (1) et méthode de continuité

1. EXISTENCE DE FONCTIONS CONTINUES DÉRIVABLES NULLE-PART

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$O_k := \{f \in C([0, 1]) \mid \forall x \in [0, 1], \exists y \in [0, 1] \text{ tel que } |f(x) - f(y)| > k|x - y|\}.$$

1. Montrez que O_k est un ouvert de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Pour $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

- $f_n(\frac{k}{n}) = 0$ pour tout $k = 0, \dots, n$
- $f_n(\frac{k+1/2}{n}) = 1$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$
- f_n est continue et affine sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1/2}{n}]$ et $[\frac{k+1/2}{n}, \frac{k+1}{n}]$ pour k ad-hoc.

Dessinez la fonction f_n . Montrez que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $y \in [0, 1]$ tel que $|f_n(x) - f_n(y)| > n|x - y|$.

3. En utilisant la densité des fonctions lipschitziennes dans $C([0, 1])$, montrez que O_k est dense dans $C([0, 1])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant le lemme de Baire, montrez qu'il existe des fonctions continues dérivables nulle-part. De plus, montrez qu'elles sont denses dans les fonctions continues sur $[0, 1]$.

2. UN PEU DE NORMES

Exercice 1. Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $A = (a_{ij})$ sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminez la norme de u lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont munis des normes suivantes :

$$u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ et } u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty).$$

Que se passe-t'il avec les autres combinaisons des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrez que $T : L_c(E) \rightarrow L_c(E)$ définie par $T(u) = u^3$ pour tout $u \in L_c(E)$ est continue.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach. Montrez que la fonction $u \mapsto u^{-1}$ est continue de $Gl_c(E)$ dans lui-même.

3. CONTINUITÉ DES SOLUTIONS PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des Banach. Soit $A \in C^0([0, 1], L_c(E, F))$ continue telle que

- (1) Il existe $c > 0$ tel que $\|A(\lambda)[x]\|_F \geq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in [0, 1]$;
- (2) $A(0) : E \rightarrow F$ est bijective continue, d'inverse continu.

Montrez que $A(\lambda)$ est un homéomorphisme pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Pour cela, on supposera que $E = F$ et $A(0) = Id_E$ dans un premier temps et on suivra les étapes suivantes :

- Montrez qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $A(\lambda) \in Gl_c(E)$ pour tout $\lambda \in [0, \epsilon_0]$.
- Montrez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $\lambda, \mu \in [0, 1]$, si $A(\lambda) \in Gl_c(E)$ et $|\lambda - \mu| < \alpha$, alors $A(\mu) \in Gl_c(E)$. On définit

$$\lambda_0 := \sup\{\lambda \in [0, 1] \text{ tel que } A(\mu) \in Gl_c(E) \text{ pour tout } \mu \in [0, \lambda]\}.$$

- Montrez que $\lambda_0 > 0$, puis que $\lambda_0 = 1$ en raisonnant par l'absurde.
- Montrez que $A(\lambda) \in Gl_c(E)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$
- Traitez le cas général $E \neq F$.

4. APPLICATION DU PROLONGEMENT PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE

Soient $a, \omega \in C^0([0, 1])$. On suppose que $\omega(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. On se donne $y \in C^0([0, 1])$. Le but de ce problème est de montrer qu'il existe une unique fonction $x \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -x''(t) + a(t)x'(t) + \omega(t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E)$$

Pour cela, on va introduire un paramètre qui permet de transformer (E) en une équation à coefficients constants, qui elle est résoluble. Pour $\lambda \in [0, 1]$, on considère l'équation

$$\begin{cases} -x''(t) + a(\lambda t)x'(t) + \omega(\lambda t)x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E_\lambda)$$

et, on définit $A(\lambda) : C^2([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ telle que pour $x \in C^2([0, 1])$, on a $A(\lambda)(x) := \varphi$ où

$$\varphi(t) := -x''(t) + a(\lambda t)x'(t) + \omega(\lambda t)x(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Sur $C^2([0, 1])$, on définit la norme

$$\|u\|_{C^2} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty \text{ for all } u \in C^2([0, 1]).$$

Etape 1 : Etude de $A(\lambda)$: 1. Montrez que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $A(\lambda) : (C^2([0, 1]), \|\cdot\|_{C^2}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

2. Montrez que $A : [0, 1] \rightarrow L_c(C^2([0, 1]), C^0([0, 1]))$ est continue (avec les bonnes normes)

3. On pose $X := \{u \in C^2([0, 1]) \text{ tel que } u(0) = u(1) = 0\}$. Montrez que $(X, \|\cdot\|_{C^2})$ est un espace de Banach.

Dorénavant, on considère $A : [0, 1] \rightarrow L_c(X, C^0([0, 1]))$.

Etape 2 : Contrôle des solutions de (E_λ) . On se donne $x \in C^2([0, 1])$ qui est une solution de (E_λ) .

3. On suppose qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que x est maximum en t_0 sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de $x'(t_0)$ et $x''(t_0)$? Déduisez-en qu'il existe $\gamma > 0$ indépendant de x, y, λ tel que $\|x\|_\infty \leq \gamma\|y\|_\infty$.

4. On pose $u := x'$. Montrez qu'il existe $t_1 \in]0, 1[$ tel que $u(t_1) = 0$. Soit $\mathcal{A}$ une primitive de $t \mapsto -a(\lambda t)$ sur $[0, 1]$. Que vaut la dérivée de $t \mapsto (u(t)e^{\mathcal{A}(t)})$? Déduisez-en une constante $B > 0$ indépendante de x, y, λ telle que $\|x'\|_\infty \leq B\|y\|_\infty$.

5. Montrez qu'il existe $M > 0$ indépendant de x, y, λ telle que $\|x\|_{C^2} \leq M\|y\|_\infty$.

6. Montrez que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $x \in X$, alors $\|A(\lambda)(x)\|_\infty \geq M^{-1}\|x\|_{C^2}$.

Etape 3 : Etude de $A(0)$: On pose $a_0 := a(0)$ et $\omega_0 := \omega(0) > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} -x''(t) + a_0x'(t) + \omega_0x(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (E_0)$$

7. On suppose que $y \equiv 0$. Déterminez $r_1 > 0 > r_2$ tels que $t \mapsto e^{rt}$ est solutions de $-x'' + a_0x' + \omega_0x = 0$ si et seulement si $r \in \{r_1, r_2\}$.

8. On admet que la fonction $x_0 \in C^2([0, 1])$ définie par

$$x_0(t) := -e^{r_1 t} \int_0^t \frac{y(s)e^{-r_1 s}}{r_1 - r_2} ds + e^{r_2 t} \int_0^t \frac{y(s)e^{-r_2 s}}{r_1 - r_2} ds$$

est solution de $-x'' + a_0x' + \omega_0x = y$ lorsque $y \not\equiv 0$.

9. Déterminez l'unique solution de (E_0)

10. Montrez que $A(0) : (X, \|\cdot\|_{C^2}) \rightarrow (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un homéomorphisme.

11. Montrez que $A(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Déduisez-en l'existence d'une unique solution de (E) .

Variation de la constante : L'expression de la question 8. provient de la méthode de la variation de la constante. Voici la méthode en dimension > 1

- Ecrire $-x'' + a_0x' + \omega_0x = y$ comme un système 2×2 $X'(t) = AX(t) + B(t)$;
- Déterminer deux solutions linéairement indépendantes X_1, X_2 de $X' = AX$ (en utilisant la résolution d'une équation linéaire d'ordre 2);
- Poser $X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ pour $t \in [0, 1]$ et montrer que $X' = AX + B$ si et seulement si $\dot{\lambda}X_1 + \dot{\mu}X_2 = B$
- Déterminer $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$