

Partiel 1 du 14 novembre

**Début : 8h ; A rendre au plus tard à 10h35 sur ARCHE ou
 par email (frederic.robert@univ-lorraine.fr)**

**On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente,
 en veillant cependant à bien en indiquer la référence.**

Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des sous-ensembles suivant, indiquez s'il est ouvert, fermé ou bien ni l'un ni l'autre :

- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 3y^8 = 2 \text{ et } \cos x \geq 0\}$
- $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^2 \geq 1 \text{ et } x - y < 0\}$

Chaque réponse devra être démontrée.

Exercice 2. On définit $C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ tq } f(x + 2\pi) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

- (1) Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ est atteint.
- (2) Montrez que $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Soit K un compact non-vidé et soit U ouvert tels que $K \subset U$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ pour tout $x \in K$.

Exercice 4. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On définit les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{lll} T_1 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) - f(0) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{lll} T_2 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto f(x) - \int_0^1 f(t) dt \right) \end{array} \right.$$

- (1) Montrez que T_1 et T_2 sont linéaires continues
- (2) Montrez que $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} \leq 2$ et $\|T_2\|_{E \rightarrow E} \leq 2$.
- (3) Montrez que $\|T_1\|_{E \rightarrow \mathbb{R}} = 2$ et que cette norme est atteinte.
- (4) En utilisant une famille de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ qui vaut 1 en 0 et "quasiment" partout -1 sinon, montrez que $\|T_2\|_{E \rightarrow E} = 2$.
- (5) Montrez que $\|T_2\|_{E \rightarrow E} = 2$ n'est pas atteinte.

**1. UNE APPLICATION DU THÉORÈME DU POINT FIXE : THÉORÈME DES
 FONCTIONS IMPLICITES**

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui seront précisés plus tard, on définit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varphi_x : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y - af(x, y) \end{array} \right.$$

1

- (1) Déterminez $\varphi'_x(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
- (2) Montrez que pour un choix judicieux de $a \in \mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que $|\varphi'_x(y)| \leq \frac{1}{2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| < 2r$ et $|y| < 2r$.
- (3) On se donne $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2r$. Montrez que $\varphi_x([-r, r]) \subset [-r, r]$.
- (4) Que peut-on dire de φ_x sur $[-r, r]$?
- (5) Toujours pour $|x| < 2r$, montrez qu'il existe un unique $y \in [-r, r]$ tel que $f(x, y) = 0$. On notera $g(x) := y$.
- (6) Montrez que $|y - y_0| \leq 2|a| \cdot |f(x, y) - f(x, y_0)|$ pour tous $x, y, y_0 \in [-r, r]$.
- (7) Déduisez-en que $g : [-r, r] \rightarrow [-r, r]$ est continue

On a donc démontré l'existence de $g : [-r, r] \rightarrow [-r, r]$ continue telle que $f(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in [-r, r]$. Avec un peu plus d'efforts, on peut montrer que g est dérivable.

2. PROBLÈME : POINT FIXE POUR DES APPLICATIONS AFFINES

On se donne un evn $(E, \|\cdot\|)$ et $K \subset E$ un compact convexe non-vidé. On définit

$$\mathcal{A}_K := \{T : E \rightarrow E \text{ affine continue telle que } T(K) \subset K\}.$$

On rappelle que $T : E \rightarrow E$ est affine s'il existe $\vec{T} : E \rightarrow E$ linéaire telle que $T(x) = T(0) + \vec{T}(x)$ pour tout $x \in E$.

L'objectif de ce problème est de montrer que pour toute famille de fonctions affines continues qui commutent et fixent K , alors il existe un point fixe commun à toutes ces fonctions affines.

- (1) On se donne $T, S \in \mathcal{A}_K$ telles que $T \circ S = S \circ T$. Montrez que $(T \circ S)(K) \subset T(K) \cap S(K)$.
- (2) Plus généralement, Soit $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{A}_K$ une famille finie telle que $T \circ S = S \circ T$ pour tous $T, S \in \mathcal{F}_f$. Montrez alors que $\bigcap_{T \in \mathcal{F}_f} T(K) \neq \emptyset$.

Pour $n \geq 1$ et $T : E \rightarrow E$, on note la moyenne

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i \text{ avec } T^i = T \circ \dots \circ T \text{ (} i \text{ fois)}.$$

- (3) Montrez que pour tout $T \in \mathcal{A}_K$, alors T_n commute avec T_p pour tous $n, p \geq 1$ et que $T_n(K) \subset K$.

On se donne une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_K$ telle que $T \circ S = S \circ T$ pour tous $S, T \in \mathcal{F}$.

- (4) Montrez que

$$\bigcap_{T \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}} T_n(K) \neq \emptyset.$$

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et utiliser un recouvrement ouvert.

Soit alors $x \in E$ un élément de cet intersection. On fixe $T \in \mathcal{F}$. Pour tout $n \geq 1$, il existe donc $x_n \in K$ tel que $x = T_n(x_n)$.

- (5) Exprimez $T_{n+1} - T_n$ en fonction de T^n et T_n ; ainsi que $T \circ T_n$ en fonction de T_{n+1} (et d'un reste).
- (6) Montrez que $x = T(x)$ et concluez.