

Devoir 6 : à rendre le 23 novembre

1. IMSD

Traitez le problème du partiel sur le théorème des fonctions implicites.

2. MFA

Exercice 1. Traiter le problème du partiel sur le point fixe de fonctions affines.

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On munit le produit $E \times F$ de la norme $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$ pour $(x, y) \in E \times F$. Soit $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

- En raisonnant comme dans la caractérisation de la continuité des applications linéaires continues, montrez que B est continue si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $|B(x, y)| \leq M\|x\|_E\|y\|_F$ pour tous $x \in E$ et $y \in F$.
- En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus, montrez que B est continue si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B(x_0, \cdot) : & F & \rightarrow \mathbb{R} \\ & y & \mapsto B(x_0, y) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} B(\cdot, y_0) : & E & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto B(x, y_0) \end{array} \right\}$$

sont continues pour tous $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$.

3. IMSD+MFA : LE THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE

Théorème 1. Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. On se donne donc E, F, T comme dans l'énoncé.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n := \overline{T(B_E(0, n))}$. Montrez que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, et déduisez-en qu'il existe $c > 0$ tel que

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

2. On fixe $y \in B_F(0, c)$. Montrez qu'il existe $x_1 \in B_E(0, 1)$ tel que

$$\|2y - T(x_1)\|_F < c.$$

3. Montrez par récurrence qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n \in B_E(0, 1)$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\left\| 2^n \left(y - T \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \right) \right) \right\|_F < c \text{ pour tout } n \geq 1.$$

4. Déduisez-en qu'il existe $x \in B_E(0, 1)$ (c'est-à-dire $\|x\|_E < 1$) tel que $y = T(x)$. Concluez.

5. Montrez que l'image par T d'un ouvert de E est un ouvert de F (c'est la définition d'une application ouverte).