

TD5bis : Quelques compléments d'applications du Lemme de Baire

Exercice 1. Montrez qu'il n'existe pas de norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui en fasse un espace de Banach.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et écrire $\mathbb{R}[X]$ comme une union dénombrable d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Question subsidiaire : peut-on munir $\mathbb{R}[X]$ d'une norme ? Histoire que la question précédente ne soit pas vide...

Exercice 2. On se donne un sous-espace vectoriel V de $C^0([0, 1])$ qui vérifie les propriétés suivantes

- V est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$
- $V \subset C^1([0, 1])$ (en d'autres termes, pour tout $f \in V$, alors f est dérivable et de dérivée continue).

Le but de ce problème est de montrer que V est de dimension finie.

1. On définit $G := \{(f, f')/f \in V\}$. Montrez que G est fermé pour la topologie produit de $C^0([0, 1])$

Indication : on pourra se rappeler que $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt$ pour tout $\varphi \in C^1([0, 1])$ et tout $x \in [0, 1]$.

2. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrez qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty \text{ pour tout } f \in V.$$

On rappelle (ou énonce) le théorème d'Ascoli : soit

$$X = \{f \in C^0([0, 1]) / |f(x)| \leq 1 \text{ et } |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \text{ pour tous } x, y \in [0, 1]\}.$$

Alors de toute suite dans X , il existe une sous-suite qui converge uniformément pour $\|\cdot\|_\infty$.

3. Montrez que $B := \{f \in V / \|f\|_\infty \leq 1\}$ est compacte pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. Montrez que V est de dimension finie.