

TD6 : Théorème de Lax-Milgram

Le but de ce TD est de prouver le théorème suivant :

Théorème 1. [dit de Lax-Milgram] Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (non nécessairement symétrique). On suppose que la forme est coercive, à savoir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in H.$$

Soit $f \in H'$ une forme linéaire continue et soit $C \subset H$ un convexe fermé non-vide. Alors il existe un unique élément $u_C \in C$ tel que

$$a(u_C, v - u_C) \geq f(v - u_C) \text{ pour tout } v \in C. \quad (E_C)$$

On commencera par la version plus simple suivante :

Théorème 2. [dit de Lax-Milgram, version $C = H$] Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (non nécessairement symétrique). On suppose que la forme est coercive, à savoir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in H.$$

Soit $f \in H'$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique élément $u_H \in H$ tel que

$$a(u_H, v) = f(v) \text{ pour tout } v \in H. \quad (E_0)$$

Preuve du Théorème 2. On suppose valides les hypothèses du Théorème 2.

- (1) Montrez qu'il existe $A : H \rightarrow H$ telle que

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle \text{ pour tous } u, v \in H.$$

- (2) Montrez que $A : H \rightarrow H$ est linéaire et continue.
 (3) Montrez qu'il existe $x_0 \in H$ tel que le problème (E_0) revient à montrer l'existence de $u_H \in H$ tel que $A(u_H) = x_0$.
 (4) Pour $\rho > 0$, on définit

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ u &\mapsto u - \rho(A(u) - x_0) \end{aligned}$$

Montrez que pour un choix judicieux de $\rho > 0$, T est contractante.

- (5) Montrez l'existence de $u_H \in H$ tel que $A(u_H) = x_0$.
 (6) Concluez.

Preuve du Théorème 1. On suppose valides les hypothèses du Théorème 1.

- (1) En vous inspirant de ce qui a été fait dans la partie précédente, montrez qu'il existe $x_0 \in H$ tel que pour tout $\rho > 0$, le problème (E_C) revient à montrer l'existence de $u_C \in C$ tel que

$$u_C = \pi_C(u_C - \rho(A(u_C) - x_0)),$$

où π_C est la projection orthogonale sur le convexe C .

- (2) Concluez par un théorème de point fixe