

TD7 : Espaces de Hilbert, topologie faible et fonctions convexes

Exercice 1. Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, non identiquement nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\theta_n(x) := \theta(x + n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrez que $\theta_n \rightharpoonup_{n \rightarrow +\infty} 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ muni de sa structure usuelle de Hilbert ; mais que la convergence n'est pas forte.
- (2) Montrez que ce résultat persiste si $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ non identiquement nulle.

Remarque : une telle suite est appelée *bosse glissante*.

Exercice 2. Soit $T : H \rightarrow X$ où $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un Hilbert et (X, d) est un espace métrique. On suppose que T est continue pour la **topologie forte** lorsque H et X sont munies des structures métriques usuelles. On se donne $x \in H$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un compact K de H tel que

$$x_n \rightharpoonup_{n \rightarrow +\infty} x \text{ et } x_n \in K \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = T(x)$.

1. CONVEXITÉ

Les exercices de cette section s'enchaînent. Dans chacun, on se donne $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Exercice 3. Soit $C \subset H$, $C \neq H$, un convexe fermé pour la topologie forte. Soit $x \in H \setminus C$. Montrez qu'il existe $\vec{u} \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle z, \vec{u} \rangle \leq \alpha \text{ pour tout } z \in C \text{ et } \langle x, \vec{u} \rangle > \alpha.$$

Indication : Considérez le projeté de x sur C et utilisez la caractérisation du projeté par le produit scalaire. Et surtout faites un dessin.

Exercice 4. Soit C un convexe de H **fermé pour la topologie forte**. Montrez que C est "fermé pour la topologie faible" au sens suivant : pour toute suite de C qui converge faiblement, alors la limite faible est dans C .

Indication : utilisez l'exercice précédent.

Remarque : la convergence faible est associée à une topologie dite faible. Un convexe fermé pour la topologie forte est alors aussi fermé pour la topologie faible.

2. SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que φ est *semi-continue inférieurement* (s.c.i.) si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\{x \in E / \varphi(x) > \alpha\} \text{ est ouvert pour la topologie forte.}$$

On dit que φ est *semi-continue supérieurement* si $-\varphi$ est semi-continue inférieurement.

- (1) Montrez qu'une fonction est continue ssi elle est semi-continue inférieurement et supérieurement.
- (2) Donnez des exemples de fonctions s.c.i non-continues. On pourra par exemple penser à des fonctions constantes par morceaux.

- (3) Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrez que φ est s.c.i si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et tout $x \in E$ tels que $x_n \rightarrow x$ **fortement** lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n).$$

Exercice 6. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et s.c.i. Soit $(x_n)_n$ telle que $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in H$. On suppose que $x_n \rightharpoonup x$ **faiblement** lorsque $n \rightarrow +\infty$. Montrez alors que

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n).$$

Indication : En raisonnant par l'absurde, montrez qu'il existe alors $\epsilon > 0$, une sous-suite $(x_{j(n)})$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(x_{j(n)}) \leq \varphi(x) - \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Déduisez-en une contradiction en utilisant un convexe fermé bien choisi.

Exercice 7. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- φ est convexe ;
- φ est s.c.i ;
- $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ au sens où pour tout $A > 0$, il existe $R > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in H, \{ \|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > A \}.$$

En vous inspirant de la méthode de minimisation du cours, montrez que φ est minorée et atteint son minimum.