

Contrôle, SUJET 1 (Nom de famille de A à D)

Début : 9h ; A rendre au plus tard à 10h sur ARCHE ou par email (frederic.robert@univ-lorraine.fr)

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. Soit une suite $(g_n)_n$ telle que $g_n \in C(X, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $g \in C(X, \mathbb{R})$ une fonction continue. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \in X$ et $x \in X$. On suppose que :

- (g_n) converge uniformément vers g ;
- (x_n) converge vers x dans X .

Montrez que $(g_n(x_n))_n$ converge vers $g(x)$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, et $u \in L_c(E)$, on définit

$$S_N(u) := \sum_{n=1}^N \frac{u^n}{n}.$$

On admet que $S_N : L_c(E) \rightarrow L_c(E)$ est continue pour tout $N \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrez que pour $u, v \in L_c(E)$, on a $\|u \circ v\|_{E \rightarrow E} \leq \|u\|_{E \rightarrow E} \|v\|_{E \rightarrow E}$.
- (2) Montrez que pour tout $u \in L_c(E)$ tel que $\|u\|_{E \rightarrow E} < 1$, alors $S_\infty(u) := \sum_{n=1}^\infty \frac{u^n}{n}$ est bien définie.
- (3) Montrez que pour tout $0 < R < 1$, la suite $(S_N)_N$ converge uniformément sur $B_{L_c(E)}(0, R)$.
- (4) Montrez que pour tout $0 < R < 1$, S_∞ est continue sur $B_{L_c(E)}(0, R)$.