

Contrôle, SUJET bis

Début : 17h ; A rendre au plus tard à 18h10 sur ARCHE ou par email (frederic.robert@univ-lorraine.fr)

Exercice 1. Soit (Z, d) un espace métrique. Soit une suite $(g_n)_n$ telle que $g_n \in C(Z, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $g \in C(Z, \mathbb{R})$ une fonction continue. Soit une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $z_n \in Z$ et $z \in Z$. On suppose que :

- (g_n) converge uniformément vers g ;
- (z_n) converge vers z dans Z .

Montrez que $(g_n(z_n))_n$ converge vers $g(z)$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 0$, et $u \in L_c(E)$, on définit

$$S_N(u) := \sum_{n=0}^N \frac{u^{2n}}{5^n}.$$

On admet que $S_N : L_c(E) \rightarrow L_c(E)$ est continue pour tout $N \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrez que pour $u, v \in L_c(E)$, on a $\|u \circ v\|_{E \rightarrow E} \leq \|u\|_{E \rightarrow E} \|v\|_{E \rightarrow E}$.
- (2) Montrez qu'il existe $R_0 > 0$ (on ne demande pas la valeur optimale ici) tel que pour tout $u \in L_c(E)$ tel que $\|u\|_{E \rightarrow E} < R_0$, alors $S_\infty(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{5^n}$ est bien définie.
- (3) Montrez que pour tout $0 < R < R_0$, la suite $(S_N)_N$ converge uniformément sur $B_{L_c(E)}(0, R)$.
- (4) Montrez que pour tout $0 < R < R_0$, S_∞ est continue sur $B_{L_c(E)}(0, R)$.
- (5) Bonus hors-barème : déterminez la meilleure valeur possible pour R_0