

Devoir 8 (facultatif) : Un problème de minimisation dans les Hilbert

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. On se donne une fonction $m : H \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- Il existe $c_0 > 0$ tel que $c_0^{-1}\|x\| \leq m(x) \leq c_0\|x\|$ pour tout $x \in H$.
- $m(\lambda x) = |\lambda|m(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in H$.
- Pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $z \in H$ tel que $z_n \rightharpoonup z$ (faiblement), alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(z_n) = m(z).$$

On pose

$$J(x) := \frac{\|x\|^2}{m(x)^2} \text{ pour tout } x \in H \setminus \{0\}.$$

1. Montrez que $\lambda := \inf_{x \in H \setminus \{0\}} J(x)$ est définie et que $0 < \lambda < +\infty$.
2. Montrez qu'il existe une suite $(x_n)_n$ telle que

$$x_n \in H \setminus \{0\} \text{ et } m(x_n) = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \lambda.$$

3. Montrez qu'il existe $x \in H$ et une sous-suite, notée $(x_{j(n)})$, qui converge faiblement vers x .
4. On pose $\theta_n := x_{j(n)} - x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez qu'il existe une suite (t_n) telle que $J(x_{j(n)}) = J(x) + t_n + o(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec $t_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrez que $J(x) = \lambda$ et que le minimum est atteint.