

Devoir 9 : Inversion de Fourier et formule de Plancherel L^2

Le but de ce devoir est de prouver les théorèmes suivant :

Théorème 1 (Inversion de Fourier). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2 (Plancherel). *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Théorème 3 (Isométrie L^2). *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et la transformée de Fourier se prolonge à une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Par commodité, dans toute la suite, on posera $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $C_c^\infty(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, etc.

1. RÉSULTATS ADMIS ET FORMULAIRE

Théorème 4 (Admis). *Soit $(g_\epsilon)_{\epsilon>0}$ telle que $g_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $\epsilon > 0$. On suppose que*

- (1) $g_\epsilon \geq 0$ pour tout $\epsilon > 0$;
- (2) $\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(x) dx = 1$ pour tout $\epsilon > 0$;
- (3) Pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\delta} g_\epsilon(x) dx = 0.$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < +\infty$. On définit

$$g_\epsilon \star f(x) := \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t) f(x-t) dt \text{ pour p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Alors $g_\epsilon \star f \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon \star f = f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}).$$

De plus, si $x_0 \in \mathbb{R}$ est tel que f est continue en x_0 , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (g_\epsilon \star f)(x_0) = f(x_0).$$

Remarque : Dans la seconde partie du Théorème admis, par " f est continue en x_0 ", on entend " f admet un représentant continu en x_0 ".

Théorème 5 (Convolution, admis). *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f \star g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$.*

2. PREUVE DU THÉORÈME 1

2.1. Un lemme intermédiaire. Soient $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R})$ deux fonctions intégrables. On définit

$$F(y, z) = \varphi(y)\psi(z)e^{-iyz} \text{ pour p.p. } (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrez que $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrez que

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(z)\psi(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\hat{\psi}(y) dy$$

et que ces deux intégrales font sens.

2.2. Preuve du Théorème 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On définit $h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Il suit du cours que

- $h \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$
- $\hat{h} = h$ and $\int_{\mathbb{R}} h(z) dz = 1$

Pour $\epsilon > 0$, on définit $h_\epsilon(z) := h(\epsilon z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. On pose $g_\epsilon = \hat{h}_\epsilon$.

3. Montrez que $g_\epsilon(\xi) = \frac{1}{\epsilon}h\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

4. Montrez que g_ϵ vérifie les hypothèses du Théorème 4.

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

5. On définit $\varphi(y) := f(x - y)$ pour p.p. $y \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\hat{\varphi}(z) = e^{-ixz}\hat{f}(-z) \text{ pour p.p. } z \in \mathbb{R}.$$

6. En utilisant (1) et la parité de h_ϵ , montrez que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(z)h_\epsilon(z) dz = f \star g_\epsilon(x)$$

7. Montrez que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}\hat{f}(z)h_\epsilon(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}\hat{f}(z) dz$$

8. Montrez le Théorème 1 en utilisant le Théorème 4. .

3. PREUVE DU THÉORÈME 2

Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

9. En utilisant les propriétés reliant la transformée de Fourier et la dérivation, exprimez $\xi\hat{f}(\xi)$ et $\xi^2\hat{f}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ en fonction des transformées de Fourier des dérivées successives de f .

10. Montrez que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On définit

$$\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On définit alors $g = f \star \tilde{f}$. On conserve les définitions de h_ϵ et g_ϵ de la section précédente.

11. Montrez que $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et que $|g(x)| \leq \|f\|_2^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrez que g est continue sur $\mathbb{R}$ et calculez $g(0)$.

12. Montrez que $\hat{g} = \sqrt{2\pi}|f|^2$

13. En utilisant (1), montrez que

$$g \star g_\epsilon(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(z) h_\epsilon(z) dz \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

14. Dédisez-en le Théorème 2.

4. PREUVE DU THÉORÈME 3

15. En utilisant le Théorème 2, montrez qu'il existe $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ isométrie (non nécessairement injective) telle que $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

16. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{G}(f)[\xi] := \mathcal{F}(f)[- \xi]$ pour pp $\xi \in \mathbb{R}$. Que vaut $\mathcal{G}(\hat{f})$ pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$?

17. Montrez que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F} = Id_{L^2}$, et déduisez-en le Théorème 3.