

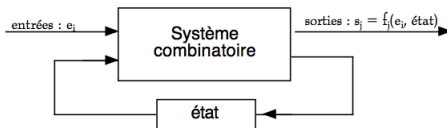
Informatique Industrielle et Automatismes

V. Laurain

But du Cours

Etude des systèmes et logique Séquentielle

- Définition : Systèmes dont les sorties à l'instant t dépendent **à la fois des entrées à cet instant, mais aussi de ce qui s'est passé auparavant : l'histoire du système.**
- Cette histoire sera représentée par une succession d'états que prend le système au cours du temps.
- Le changement d'état sera provoqué par une variation des entrées.
- Les sorties sont fonction de l'état du système.



Exemples

Digicode, Ascenseur, Feux de circulations, Chaînes de production...

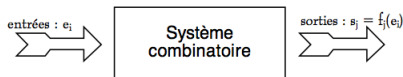
Particularité des Automatismes

- De nombreux dispositifs électronique, électromécanique, (mécanique, électrique, pneumatique, etc...) fonctionnement en **TOUT ou RIEN**. Ceci sous-entend qu'ils peuvent prendre 2 états. Exemple :
 - arrêt-marche, ouvert-fermé, enclenché-déclenché, avant-arrière, vrai-faux, conduction-blocage
- Pour ces raisons, il est beaucoup plus avantageux d'employer un système mathématique n'utilisant que 2 valeurs numériques : 0 ou 1
- Pour étudier les conditions de fonctionnement de ces dispositifs : Algèbre de Boole.

Systèmes à logique Combinatoire

Définition

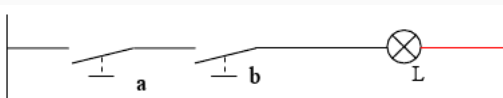
Dans un système logique (les entrées et sorties ne peuvent prendre que 0 ou 1 comme valeur) combinatoire, les sorties ne sont fonctions que des entrées.



But

- Définir la sortie du système en fonction des entrées : **la table de vérité.**
- Outils : l'algèbre de Boole

Considérons le câblage suivant :



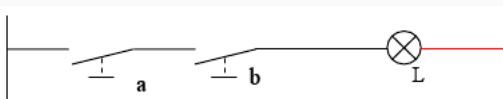
Question

la Lampe L est allumée lorsque ... ?

Terminologie

- L'état de la lampe L (allumée/Eteinte) représente la sortie **S** :
 - $S = 1$: Lampe Allumée
 - $S = 0$: Lampe Eteinte
- Les états des interrupteurs représentent les entrées (a et b) :
 - $a = 1$: L'interrupteur a est enfoncé (contact)
 - $a = 0$: L'interrupteur a n'est pas enfoncé (pas de contact)

Considérons le câblage suivant :



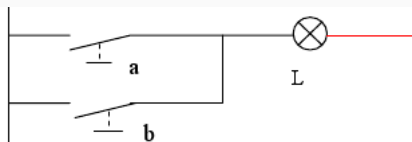
Question

la Lampe L est allumée lorsque **les interrupteurs a ET b font contact**

Table de vérité Fonction Logique ET (AND) : $S = a.b$

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Considérons le câblage suivant :



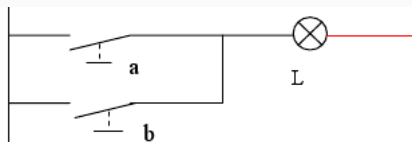
Question

la Lampe L est allumée lorsque ... ?

Terminologie

- L'état de la lampe L (allumée/Eteinte) représente la sortie **S** :
 - $S = 1$: Lampe Allumée
 - $S = 0$: Lampe Eteinte
- Les états des interrupteurs représentent les entrées (a et b) :
 - $a = 1$: L'interrupteur a est enfoncé (contact)
 - $a = 0$: L'interrupteur a n'est pas enfoncé (pas de contact)

Considérons le câblage suivant :



Question

la Lampe L est allumée lorsque **les interrupteurs a OU b font contact**

Table de vérité Fonction Logique OU (OR) : $S = a + b$

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Considérons le câblage suivant :



Question

la Lampe L est allumée lorsque ... ?

Terminologie

- L'état de la lampe L (allumée/Eteinte) représente la sortie **S** :
 - $S = 1$: Lampe Allumée
 - $S = 0$: Lampe Eteinte
- Les états des interrupteurs représentent les entrées (a et b) :
 - $a = 1$: L'interrupteur a est enfoncé (**pas de contact**)
 - $a = 0$: L'interrupteur a n'est pas enfoncé (**contact**)

Considérons le câblage suivant :



Question

la Lampe L est allumée lorsque **l'interrupteur a n'est pas enfoncé**

Table de vérité Fonction Logique NON (NOT) : $S = \bar{a}$

a	S
0	0
1	1

Autre fonction utilisée **OU EXCLUSIF (XOR)** : $S = a \oplus b$

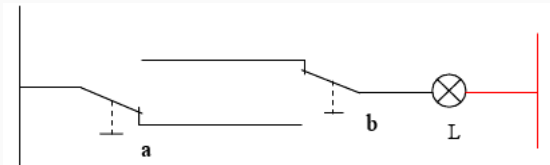
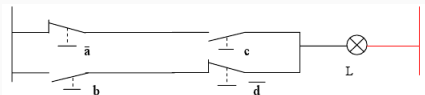


Table de vérité Fonction Logique **XOR**

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercices

- Déterminer le câblage de cette équation logique : $S = (a + b).(c + d)$
- Déterminer l'équation logique du circuit suivant :



Determiner la table de vérité

Comment faire

- Soit à partir d'essais
- Soit à partir d'une equation logique

Etapes suivantes

- Déterminer la forme canonique de l'équation logique
- Simplifier cette equation logique
 - Soit en utilisant l'algèbre de Boole
 - Soit en utilisant le Tableau de Karnaugh

Determiner la table de vérité : Utilisation du code binaire

Base Décimale (base de 10)

- 10 chiffres : 0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9
- Décomposition : $1325 = 1.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0$

Base Binaire (base de 2)

- 2 chiffres : 0,1
- Exemple de nombre binaire $1101 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 14$ (en base décimale)

constat

Il y a 10 types de personnes : Ceux qui comprennent le binaire et ceux qui ne le comprennent pas.

Determiner la table de vérité : Utilisation du code binaire

Table de vérité de l'équation logique : $S = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$

1^{ère} Etape : Lister toutes les combinaisons possibles

Dec.	a	b	c	S
0	0	0	0	X
1	0	0	1	X
2	0	1	0	X
3	0	1	1	X
4	1	0	0	X
5	1	0	1	X
6	1	1	0	X
7	1	1	1	X

Determiner la table de vérité : Utilisation du code binaire

Table de vérité de l'équation logique : $S = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$

2^{ème} Etape : Determiner la valeur de la sortie

Dec.	a	b	c	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Determiner la table de vérité : Utilisation du code binaire

Table de vérité de l'équation logique : $S = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$

3^{eme} Etape : Etablir l'expression canonique de la loi de sortie

Dec.	a	b	c	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Forme canonique = Union de **mintermes**

$$S = \underbrace{\bar{a}\bar{b}c}_{\text{minterme}} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

Determiner la table de vérité : Utilisation du code binaire

Table de vérité de l'équation logique : $S = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$

3^{eme} Etape : Etablir l'expression canonique de la loi de sortie

Dec.	a	b	c	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Forme canonique = Union de **mintermes**

$$S = \underbrace{\bar{a}\bar{b}c}_{\text{minterme}} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

Determiner la table de vérité : Utilisation du code binaire

Table de vérité de l'équation logique : $S = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$

3^{eme} Etape : Etablir l'expression canonique de la loi de sortie

Dec.	a	b	c	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Forme canonique = Union de **mintermes**

$$S = \underbrace{\bar{a}\bar{b}c}_{\text{minterme}} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

Exercices

- Table de vérité et equation canonique des equations logiques suivantes :
 $S = a.(b + c), S = a \oplus b, S = (a + b).(c + d)$

Simplification des fonctions binaires : Algèbre de Boole

Propriétés

- Commutativité : $x + y = y + x$ $x.y = y.x$
- Distributivité : $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$ $x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$
- Element neutre : $x + 0 = x$ $x.1 = x$
- Element complémentaire : $x + \bar{x} = 1$ $x.\bar{x} = 0$

Théorèmes à 1 variable

- $a + 1 = 1$ $a.1 = a$
- $a + 0 = a$ $a.0 = 0$
- $a + a = a$ $a.a = a$
- $a + \bar{a} = 1$ $a.\bar{a} = 0$
- $\bar{\bar{a}} = a$

Autres lois

- Loi de De Morgan : $\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$ $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + A\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC$$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + A\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC$$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + A\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC$$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + A\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC$$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + A\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC$$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + A\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + ABC + \bar{A}BC + \bar{A}BC$$

Exemple : Simplification

- $S = \bar{a}.\bar{b}c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$
- $S = a.\bar{b}(c + \bar{c}) + a.b(\bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.\bar{b} + a.b + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a.(\bar{b} + b) + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = a + \bar{a}.\bar{b}.c$
- $S = (a + \bar{a}).(a + \bar{b}.c)$
- $S = (a + \bar{b}.c)$

Exercice : Simplification

$$F_1 = ABC + B(A + \bar{C}) + \overline{\bar{A} + B + \bar{A}C}$$

$$F_2 = (\bar{A}B + \bar{A}\bar{B})(AB + \bar{A}\bar{B})$$

$$F_3 = ABC + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

Simplification par les tableaux de Karnaugh

Utilisation du code gray

En code Gray, un seul bit peut changer de valeur entre 2 étapes

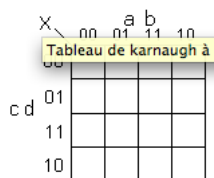
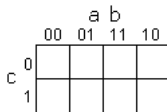
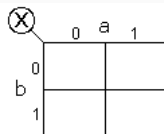
Code Gray à 4 bits

Nombre décimal	Code binaire pur				Code Gray			
	B4	B3	B2	B1	G4	G3	G2	G1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0

Simplification par les tableaux de Karnaugh

Tableau de Karnaugh : Représentation graphique d'une table de vérité

Code Gray pour 2,3 et 4 variables



Exemple

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Principe de simplification

But

Créer des groupes les plus grands possible de taille 2^n : 1, 2, 4, 8, 16, ...

Règles

Un bloc peut être formé seulement de blocs adjacents

Les cotés gauches et droits, supérieurs et inférieurs et les angles sont adjacents

Exemple

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Exemple : Trouver les blocs

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Exemple : Trouver les blocs

ab/cd	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

Exemple : Trouver les blocs

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

Principe de simplification

Loi de simplification

Chaque bloc représente une partie de la loi de sortie simplifiée ou seules les variables ne changeant pas de valeur au sein de ce bloc sont prises en compte

Exemple

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$$S = d.b + \bar{d}.\bar{b}$$

Principe de simplification

Loi de simplification

Chaque bloc représente une partie de la loi de sortie simplifiée ou seules les variables ne changeant pas de valeur au sein de ce bloc sont prises en compte

Exemple

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$$S = d.b + \bar{d}.\bar{b}$$

Principe de simplification

Loi de simplification

Chaque bloc représente une partie de la loi de sortie simplifiée ou seules les variables ne changeant pas de valeur au sein de ce bloc sont prises en compte

Exemple

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$$S = d.b + \bar{d}.\bar{b}$$

Exemple : Simplifier

ab/cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	0	0

Utiliser Karnaugh pour simplifier les expressions suivantes

- $F1 = \bar{a}bc + c\bar{b}\bar{a} + b\bar{c}\bar{a} + \bar{c}\bar{a}b$
- $F2 = ab + \bar{b}a$
- $F3 = \bar{d}\bar{c}ba + \bar{d}cb\bar{a} + \bar{d}c\bar{b}a + \bar{d}cba$
- $F4 = dca + \bar{b}c\bar{a} + \bar{c}a$

Attention

Il faut passer par la table de vérité ou par la forme canonique de l'équation de sortie