

Notion de vecteur dans le plan

1 Vecteur dans le plan

† Dans la suite, l'ensemble des points du plan est noté $\mathcal{P}$. Les points de $\mathcal{P}$ sont souvent désignés par des lettres capitales ou des capitales accentuées $A, B, A', B', \dots$

Pour A et B dans $\mathcal{P}$, on désigne par $[AB]$ le segment joignant A et B et par AB sa longueur.

Quand les points A et B ne sont pas confondus, ils déterminent une unique droite notée (AB) .

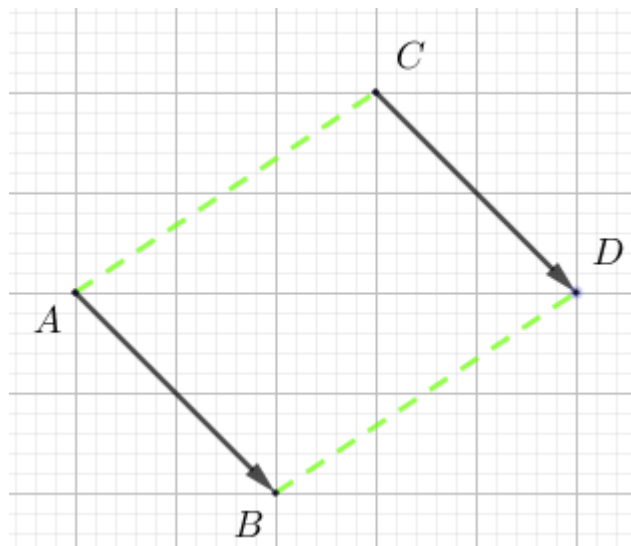
Rappelons que deux droites parallèles définissent une même direction.

Définition 1 Soient A, B, C et D des points du plan. On suppose que A et B sont distincts.

1. On dit que D est l'image de C par la translation qui transforme A en B si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

2. Si D est l'image de C par la translation qui transforme A en B , on dit alors que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

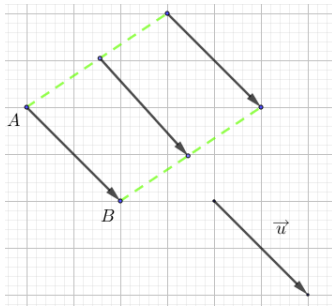
3. Dans ce cas, le point A est l'origine de $\overrightarrow{AB}$, le point B en est l'extrémité et la longueur de $[AB]$ est sa longueur (ou norme).



Remarques

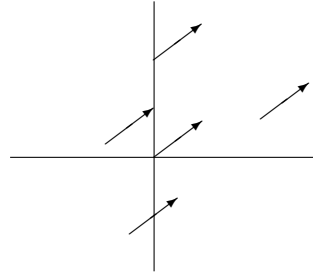
1. Dire que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ revient à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont même longueur et D est situé, par rapport à C , du même côté que B par rapport à A .

2. La donnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la donnée d'une direction (ici celle de la droite (AB)), d'un sens sur la droite (AB) , de A vers B et d'une longueur (celle du segment $[AB]$).



3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représenté de plusieurs façons comme on peut le voir sur la figure ci-contre : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

4. La figure ci-dessous montre plusieurs segments orientés (flèches) : ils ont même sens, même direction et les segments correspondants ont même longueur. Ce sont des représentants du même vecteur.



On retiendra que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

5. Si les points A et B sont confondus alors on posera, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$. Le vecteur $\vec{0}$ est appelé vecteur nul. Il représente la translation *identité* : tout point est envoyé sur lui-même.

6. Si on se fixe un point O du plan alors, pour vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point A du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

7. En physique, certaines quantités sont caractérisées par leur grandeur, leur direction et leur sens comme par exemple, la force, la vitesse et l'accélération. C'est, entre autres, pour décrire ces quantités que la notion de vecteur est introduite.

Dans la suite on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

2 Opérations sur les vecteurs

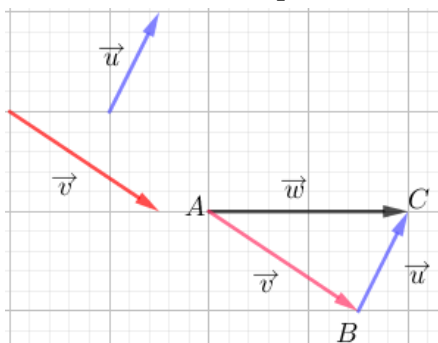
Addition des vecteurs

Définition 2 Soient $\vec{v}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs différents du vecteur nul. Le vecteur somme de $\vec{v}$ et $\vec{u}$ est le vecteur obtenu par la construction décrite ci-dessous.

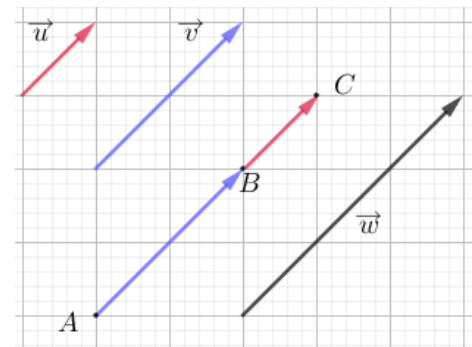
Soit A un point quelconque du plan (cf. Figures ci-dessous). Soient B et C les points du plan tels que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v}, \overrightarrow{BC} = \vec{u}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ représente alors la somme des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$.



Directions différentes



Même direction

Notation

La somme des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ est notée $\vec{v} + \vec{u}$.

Règle du parallélogramme

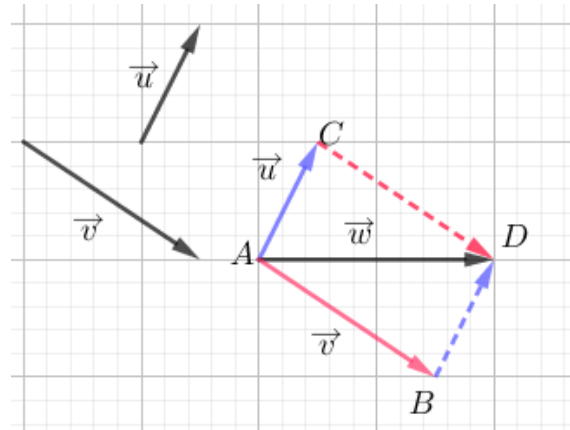
L'addition de vecteurs peut être définie en utilisant la règle du parallélogramme employée en mécanique pour décrire la composition des forces.

On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction.

Soit A un point quelconque du plan. Soient B et C les points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v}, \overrightarrow{AC} = \vec{u}.$$

La somme de $\vec{v}$ et $\vec{u}$ est le vecteur représenté par $\overrightarrow{AD}$ et porté par la diagonale du parallélogramme construit sur les segments $[AB]$ et $[AC]$.



Remarques

1. On vérifie facilement que $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

2. Soient A , B et C des points quelconques du plan, on a **la relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $\vec{0}$ le vecteur nul. On a $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Propriétés - Règles de calcul 1

L'addition vectorielle ainsi définie possède des propriétés (analogues à l'addition des nombres).

— Associativité : quels que soient les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$,

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3). \quad (2)$$

Autrement dit, la somme de trois vecteurs (ou plus) est définie sans ambiguïté.

— Commutativité : quels que soient les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$,

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1. \quad (3)$$

— Existence d'un élément neutre (le vecteur nul) : quel que soit le vecteur $\vec{v}$,

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}. \quad (4)$$

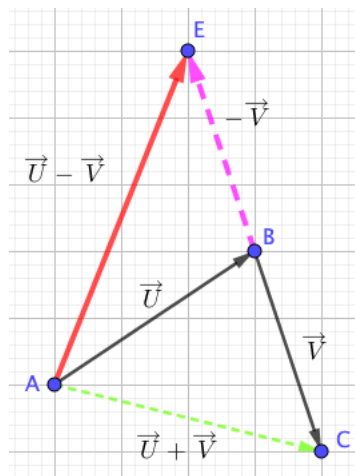
— Existence du **vecteur opposé** : la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (cas particulier de la relation de Chasles) permet d'établir qu'à tout $\vec{v}$, on peut associer un unique vecteur noté $-\vec{v}$ tel que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}. \quad (5)$$

Dans la dernière égalité ci-dessus, si $\vec{V}$ est représenté par $\overrightarrow{AB}$ alors $-\vec{V}$ est représenté par $\overrightarrow{BA}$.

Définition 3 -Différence

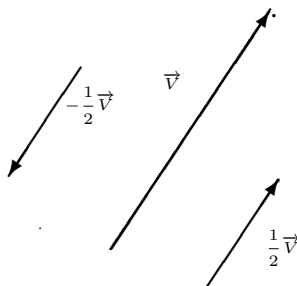
Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs. La différence de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{U} + (-\vec{V})$.



Multiplication par un nombre réel

Définition 4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{V}$ un vecteur de longueur ℓ . On définit le vecteur $\vec{W} = \lambda \vec{V}$ de la manière suivante.

- a) Si $\lambda = 0$ alors $\vec{W} = \vec{0}$.
- b) Si $\lambda > 0$ alors $\vec{W}$ est le vecteur ayant pour longueur $\lambda \times \ell$, même direction et même sens que $\vec{V}$.
- c) Si $\lambda < 0$ alors $\vec{W}$ est le vecteur ayant pour longueur $(-\lambda) \times \ell$, même direction et même sens que $-\vec{V}$ (sens contraire de $\vec{V}$).



Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

La multiplication des vecteurs par un nombre réel et l'addition des vecteurs ont de bonnes propriétés. Voici les principales.

Propriétés - Règles de calcul 2

- a) Quel que soit le vecteur $\vec{V}$, on a : $1\vec{V} = \vec{V}$.
- b) Quels que soient les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ et le nombre réel λ , on a :

$$\lambda (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda \vec{V}_1 + \lambda \vec{V}_2. \quad (6)$$

c) Quels que soient le vecteur $\vec{V}$ et les nombres réels λ et μ , on a :

$$(\lambda + \mu)\vec{V} = \lambda\vec{V} + \mu\vec{V}, \quad (7)$$

$$(\lambda\mu)\vec{V} = \lambda(\mu\vec{V}). \quad (8)$$

Exercice

Soit $\vec{V}$ un vecteur du plan et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'on a

- a) $\alpha\vec{V} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\alpha = 0$,
 b) $(-1)\vec{V} = -\vec{V}$.

Vecteurs colinéaires

Définition 5 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs nuls. On dit que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ s'il existe un nombre réel, disons α , tel que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}.$$

Remarques

1. Avec les mêmes notations.

a) Si $\vec{u}$, différent du vecteur nul, est colinéaire à $\vec{v}$ alors $\vec{v}$ est non nul et colinéaire à $\vec{u}$: si $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ alors, $\alpha \neq 0$ et $\vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{u}$.

b) Tout vecteur non nul est colinéaire à lui-même ($\alpha = 1$).

c) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls. Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{w}$: si $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ et $\vec{v} = \beta\vec{w}$, où α et β sont deux nombres réels alors $\vec{u} = (\alpha\beta)\vec{w}$.

Ces propriétés permettent de parler de plusieurs vecteurs non nuls colinéaires.

2. Des vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont même direction.

Des propriétés précédentes on déduit facilement la proposition suivante qui permet de traduire en termes de vecteurs les notions d'alignement et de parallélisme.

Proposition - Colinéarité et points du plan

1. Soient A , B et C des points du plan. Les trois points sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
2. Soient A , B , C et D des points du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Exercice

Soient A et B des points distincts du plan et I un point du plan. On rappelle que I est le milieu du segment $[AB]$ si I appartient au segment $[AB]$ et si $IA = IB$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Le point I est le milieu du segment $[AB]$.
- ii) Le point I vérifie $\vec{AI} = \vec{IB}$.
- iii) Le point I vérifie $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
- iv) Le point I vérifie $\vec{AB} = 2\vec{AI}$.
- v) Pour tout point M du plan on a : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.