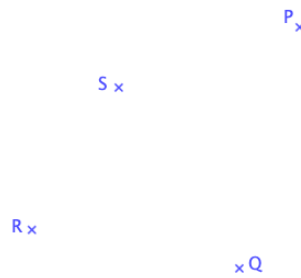
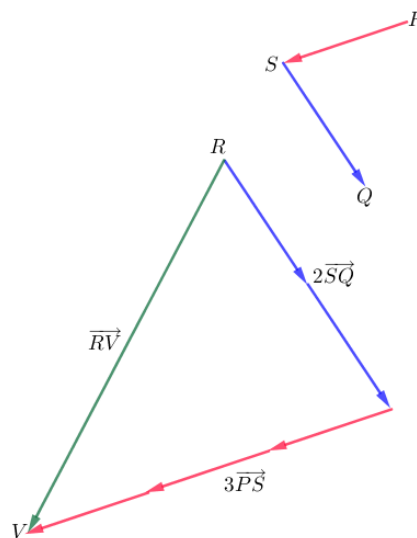

S'exercer sur la notion de vecteurs : corrigé des exercices

Exercice 1

Soient R , S , P et Q des points du plan (cf. figure ci-dessous). Construire le point V tel que : $\overrightarrow{RV} = 2\overrightarrow{SQ} + 3\overrightarrow{PS}$.

**Réponse 1**

Voici la construction de V tel que $\overrightarrow{RV} = 2\overrightarrow{SQ} + 3\overrightarrow{PS}$.



Exercice 2

Soient A, B, C et D des points du plan. Simplifier le plus possible les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}.$$

Réponse 2

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

Exercice 3

On désigne par A, B, C, D, T, Z, G et M des points du plan. Traduire chacune des affirmations suivantes par une égalité vectorielle :

- 1) Le point G est le milieu de $[TZ]$.
- 2) Le point M est le point du segment $[AB]$ tel que $AM = 3MB$.
- 3) Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze dont $[AB]$ est une base et

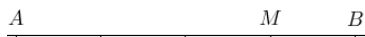
$$AB = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad CD = 2 \text{ cm}.$$

Réponse 3

1. Le point G est le milieu du segment $[TZ]$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{TG}$ et $\overrightarrow{GZ}$ sont égaux. C'est-à-dire $\overrightarrow{TG} = \overrightarrow{GZ}$. Ce qui peut aussi se traduire, par exemple, par

$$\overrightarrow{TG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TZ} \quad \text{ou bien} \quad \overrightarrow{TZ} = 2\overrightarrow{TG}$$

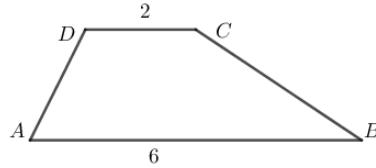
2. On peut s'aider du dessin suivant :



On a alors

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} \quad \text{ou bien encore} \quad \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

3. Voici un dessin du trapèze $ABCD$:



On a les égalités :

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Exercice 4

Soient O un point du plan et $ABCD$ un parallélogramme de centre O ((AB) est parallèle à (DC)).

1. Placer le point E du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.
2. Trouver le réel λ tel que $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AO}$.

Réponse 4

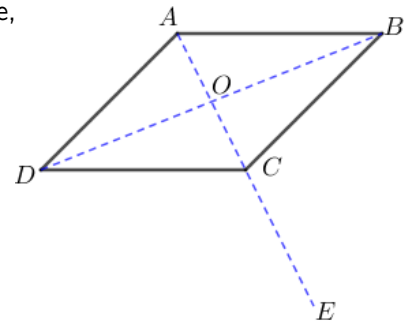
1. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, d'après la règle éponyme, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

On construit E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ (voir la figure ci-contre).

2. Le point O étant le centre du parallélogramme, c'est donc le milieu de $[AC]$. On a donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ et donc

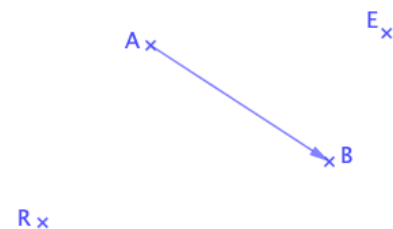
$$\overrightarrow{AE} = 2(2\overrightarrow{AO}) = 4\overrightarrow{AO}.$$



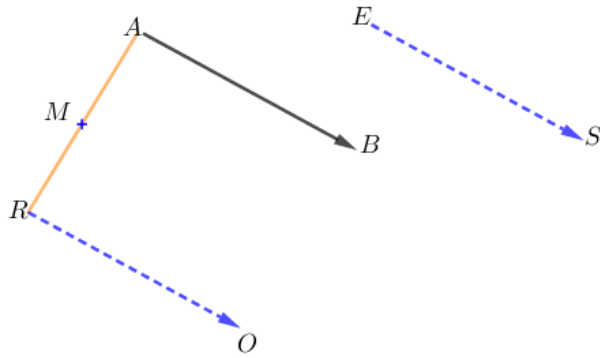
Exercice 5

On considère la figure ci-contre où A , B , R et E sont des points du plan.

1. Construire les points O et S , images des points R et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Construire le point M tel que $\overrightarrow{RM} = -\overrightarrow{AM}$. Justifier.
3. Quel est la nature du quadrilatère $ROSE$? Justifier.



Réponse 5



1. Le point O est l'image de R par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{AB}$. De même, $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{AB}$.

2. On a : $\overrightarrow{RM} = -\overrightarrow{AM}$ et par suite

$$\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{MA}.$$

Le point M est donc le milieu du segment $[AR]$.

3. Comme, d'après la question 1, $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{ES}$ et le quadrilatère $ROSE$ est un parallélogramme.

Exercice 6

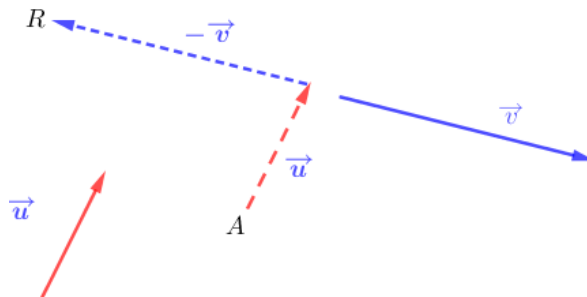
On considère la figure suivante où A est un point et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan :



Construire le point R du plan tel que : $\overrightarrow{AR} = \vec{u} - \vec{v}$.

Réponse 6

On a $\overrightarrow{AR} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Exercice 7

Soit la figure



Les points alignés $A, B, \dots, L$ ci-dessus sont espacés de façon régulière.
Compléter avec le réel qui convient les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{EH} = \dots \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DE} = \dots \overrightarrow{KF}, \quad \overrightarrow{HK} = \dots \overrightarrow{BG}, \quad \overrightarrow{FC} = \dots \overrightarrow{CJ}.$$

Réponse 7

On a les égalités :

$$\overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{KF}, \quad \overrightarrow{HK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BG}, \quad \overrightarrow{FC} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{CJ}.$$

Exercice 8

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Soient les points D et E tels que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

- 1) Justifier que l'on a l'égalité : $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.
- 2) Démontrer que C est le milieu de du segment $[DE]$.
- 3) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. En déduire la nature du quadrilatère $DABE$.

Réponse 8

Hypothèses : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} \quad \text{en vertu de la règle de Chasles} \\ &= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{par hypothèse} \\ &= -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{car } \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \quad \text{car l'addition des vecteurs est commutative} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \quad \text{car } -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \text{et } 2\overrightarrow{AB} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2. Pour démontrer que C est le milieu de du segment $[DE]$, on établit l'égalité $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.
Par hypothèse, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.

3. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \quad \text{d'après la règle de Chasles} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \quad \text{d'après les questions précédentes} \\ &= 4\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (ED) sont strictement parallèles.
Le quadrilatère $DABE$ est donc un trapèze.

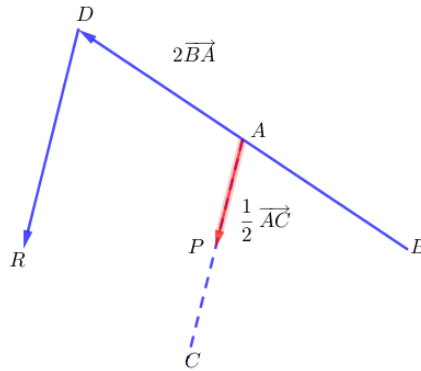
Exercice 9

Soient A , B et C trois points non alignés du plan.

- 1) Construire les vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{BA}$.
- 2) Construire les points P et R tels que : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.
- 3) Exprimer $\overrightarrow{BR}$ en fonction de $\overrightarrow{BP}$.
- 4) Interpréter ce résultat.

Réponse 9

1. et 2. Dans le dessin ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BD}$ représentent respectivement $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{BA}$. Les points P et R sont tels que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.



3. Expression de $\overrightarrow{BR}$ en fonction de $\overrightarrow{BP}$. On a

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BR} &= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\
 &= 2\overrightarrow{BA} + 2\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= 2\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\
 &= 2\overrightarrow{BP}
 \end{aligned}$$

4. L'expression $\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{BP}$ montre que les points B , P et R sont alignés et P est le milieu du segment $[BR]$

Exercice 10

Soit la figure



La graduation sur cette droite est régulière. Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel α tel que $\vec{v} = \alpha \vec{u}$.

- 1) $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$.
- 2) $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$.

- 3) $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.
 4) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Réponse 10

- 1) On a $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ donc $\vec{v} = \frac{5}{2} \vec{u}$.
 2) Et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ donc $\vec{v} = \frac{5}{2} \vec{u}$.
 3) De même, $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ par suite $\vec{v} = -\vec{u}$.
 4) Et pour finir, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ donc $\vec{v} = -\frac{8}{5} \vec{u}$.
-

Exercice 11

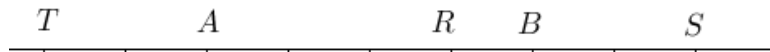
Soient A et B deux points distincts du plan.

Dessiner A et B puis placer les points R , S et T tels que :

$$\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BT} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB},$$

Réponse 11

On a la figure



Les points R , S et T vérifient

$$\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BT} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BA}.$$

Exercice 12

Soient A , B , C , D , M et N des points du plan. Simplifier le plus possible les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MN}.$$

Réponse 12

1. Simplifions $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \quad \text{grâce à l'associativité} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \quad \text{car } -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad \text{car } -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} \quad \text{grâce à la relation de Chasles} \end{aligned}$$

2. De même, on a

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NM} \quad \text{car} \quad -\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} \text{ et } -\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM} \\
 &= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} \quad \text{grâce à la commutativité} \\
 &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} \quad \text{grâce à la relation de Chasles} \\
 &= \overrightarrow{AD} \quad \text{grâce à la relation de Chasles}
 \end{aligned}$$

Exercice 13

Le plan étant rapporté à un repère, on se donne les points :

$$A(-5 ; 2), \quad B(3 ; 0) \quad \text{et} \quad C(-1 ; 4).$$

Calculer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}.$$

Réponse 13

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On rappelle que si $P(x_p ; y_p)$ et $Q(x_q ; y_q)$ sont deux points du plan alors le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(x_q - x_p ; y_q - y_p)$ et on écrit

$$\overrightarrow{PQ} (x_q - x_p ; y_q - y_p) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p) \vec{i} + (y_q - y_p) \vec{j}$$

Avec ces notations, on a $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} = 8 \vec{i} + (-2) \vec{j}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A) \vec{i} + (y_C - y_A) \vec{j} = 4 \vec{i} + 2 \vec{j}$.

et $-3\overrightarrow{AC} = -2 \vec{i} - 6 \vec{j}$.

Ce qui entraîne l'égalité

$$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (8 - 12) \vec{i} + (-2 - 6) \vec{j} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = -4 \vec{i} - 8 \vec{j}.$$

Soit $M(x, y)$. On a $\overrightarrow{AM} = (x - x_A) \vec{i} + (y - y_A) \vec{j}$ donc $\overrightarrow{AM} = (x + 5) \vec{i} + (y - 2) \vec{j}$.

Ce qui donne les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} &\iff \begin{cases} x + 5 = -4 \\ y - 2 = -8 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -9 \\ y = -6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le seul point qui vérifie l'égalité donnée est le point qui a pour coordonnées $(-9 ; -6)$.
