
S'exercer sur les coordonnées : corrigé des exercices

Exercice 1

Le plan étant rapporté à un repère, on se donne les points :

$$A(-5 ; 2), \quad B(3 ; 0) \quad \text{et} \quad C(-1 ; 4).$$

Calculer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}.$$

Réponse 1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On rappelle que si $P(x_p ; y_p)$ et $Q(x_q ; y_q)$ sont deux points du plan alors le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(x_q - x_p ; y_q - y_p)$ et on écrit

$$\overrightarrow{PQ} (x_q - x_p ; y_q - y_p) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p) \vec{i} + (y_q - y_p) \vec{j}$$

Avec ces notations, on a $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} = 8 \vec{i} + (-2) \vec{j}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A) \vec{i} + (y_C - y_A) \vec{j} = 4 \vec{i} + 2 \vec{j}$.

et $-3\overrightarrow{AC} = -2 \vec{i} - 6 \vec{j}$.

Ce qui entraîne l'égalité

$$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (8 - 12) \vec{i} + (-2 - 6) \vec{j} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = -4 \vec{i} - 8 \vec{j}.$$

Soit $M(x, y)$. On a $\overrightarrow{AM} = (x - x_A) \vec{i} + (y - y_A) \vec{j}$ donc $\overrightarrow{AM} = (x + 5) \vec{i} + (y - 2) \vec{j}$.

Ce qui donne les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} &\iff \begin{cases} x + 5 = -4 \\ y - 2 = -8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -9 \\ y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Le seul point qui vérifie l'égalité donnée est le point qui a pour coordonnées $(-9 ; -6)$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points :

$$R(-1 ; 4), \quad S(1 ; -8), \quad T(2 ; -5) \quad \text{et} \quad U(-3 ; 4).$$

- 1) Les droites (RT) et (SU) sont-elles parallèles ? Justifier en utilisant des vecteurs.
- 2) Quelle est la nature du quadrilatère $RSUT$? Justifier.

Réponse 2

1. On munit le plan du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les droites (RT) et (SU) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{SU}$ sont colinéaires. Puisque nous sommes dans le plan muni d'un repère, calculons les coordonnées de chacun des vecteurs.

On a les égalités :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RT} &= (x_T - x_R) \vec{i} + (y_T - y_R) \vec{j} \\ &= (2 + 1) \vec{i} + (-5 - 4) \vec{j} \\ &= 3 \vec{i} - 9 \vec{j}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SU} &= (x_U - x_S) \vec{i} + (y_U - y_S) \vec{j} \\ &= (-3 - 1) \vec{i} + (4 - (-8)) \vec{j} \\ &= -4 \vec{i} + 12 \vec{j}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{RT} = 3(\vec{i} - 3\vec{j})$ et $\overrightarrow{SU} = -4(\vec{i} - 3\vec{j})$. Autrement dit, $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{SU}$, colinéaires à un même vecteur, sont colinéaires. En fait, on a $\overrightarrow{RT} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SU}$. Et enfin, les droites (RT) et (SU) sont parallèles.

2. Le quadrilatère $RSUT$ a deux côtés parallèles donc c'est un trapèze. Est-ce un parallélogramme ? Il faudra comparer les droites (RS) et (TU) ou, ce qui revient au même, les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} &= (x_S - x_R) \vec{i} + (y_S - y_R) \vec{j} \\ &= (1 + 1) \vec{i} + (-8 - 4) \vec{j} \\ &= 2 \vec{i} - 12 \vec{j} \\ &= 2(\vec{i} - 6\vec{j}) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TU} &= (x_U - x_T) \vec{i} + (y_U - y_T) \vec{j} \\ &= (-3 - 2) \vec{i} + (4 - (-5)) \vec{j} \\ &= -5 \vec{i} + 9 \vec{j}. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$ ne sont pas colinéaires et donc $RSUT$ n'est pas un parallélogramme.

Exercice 3

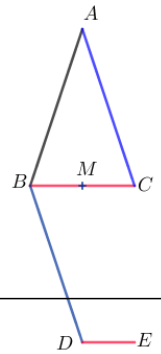
Soit un triangle ABC isocèle en A . Soit M le milieu de sa base $[BC]$. Soit D l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et E l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BM}$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère $MCED$? Justifier.

Réponse 3

1. Voici la figure (ci-dessous).

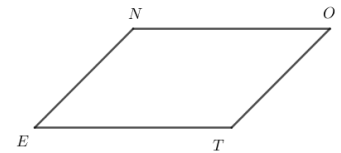
2. Comme le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, on a, par définition, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Le quadrilatère $ABDC$ est donc un parallélogramme.
3. Comme le point E est l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BM}$, on a, par définition, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DE}$. Or M est le milieu du segment $[BC]$. Donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ et par voie de conséquence, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{MC}$. Ce qui signifie que le quadrilatère $MCED$ est un parallélogramme.



Exercice 4

On considère un parallélogramme $NOTE$ (cf. figure).

- 1) Construire le point A , image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{TE}$ et le point B , image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{OT}$.
- 2) Montrer que E est le milieu du segment $[BN]$.



Réponse 4

Comme le point A , est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{TE}$ et le point B est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{OT}$, on a

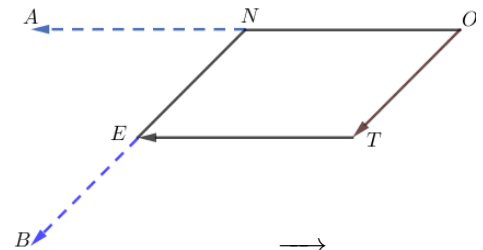
$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{TE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OT}.$$

Ce qui donne la figure ci-contre.

2. Pour montrer que E est le milieu du segment $[BN]$, on exprime, par exemple, $\overrightarrow{NB}$ en fonction de $\overrightarrow{NE}$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NB} &= \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EB} && \text{grâce à la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{OT} && \text{par hypothèse, } \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OT} \\ &= \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NE} && \text{car } \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{OT} \text{ (NOTE est un parallélogramme)} \\ &= 2\overrightarrow{NE} \end{aligned}$$

Ou encore $\overrightarrow{NE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$. Le point E est bien le milieu du segment $[BN]$.



Exercice 5

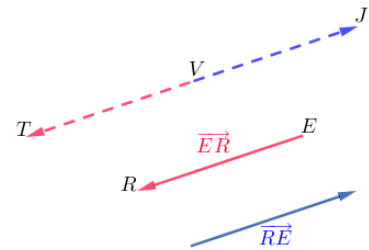
On considère trois points non alignés V , E et R .

- 1) Construire les points T et J , images respectives de V par les translations de vecteurs $\overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{RE}$.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{JV} = \overrightarrow{VT}$.

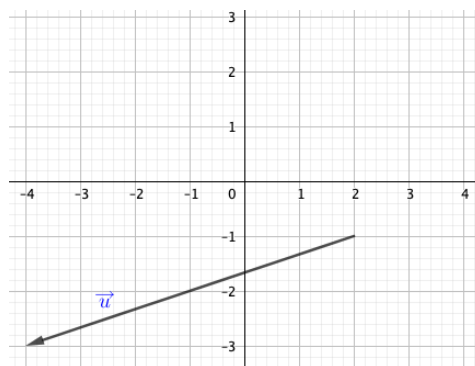
Réponse 5

1. Construction des points T et J . On doit avoir $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{VJ} = \overrightarrow{RE}$, voir figure ci-contre.
2. On a

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{JV} &= -\overrightarrow{VJ} \quad \text{voir cours} \\
 &= -\overrightarrow{RE} \quad \text{car } \overrightarrow{VJ} = \overrightarrow{RE} \\
 &= \overrightarrow{ER} \quad \text{voir cours} \\
 &= \overrightarrow{VT} \quad \text{car } \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{ER}
 \end{aligned}$$

**Exercice 6**

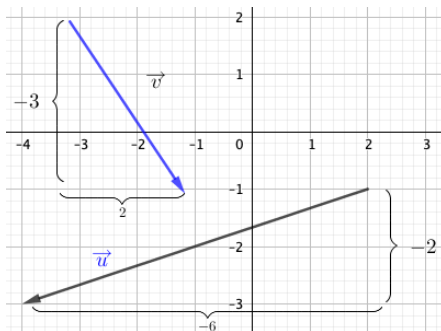
On considère la figure suivante



- 1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.
- 2) Tracer sur la même figure le vecteur $\vec{v}(2; -3)$.

Réponse 6

1. On a, par lecture directe sur le dessin : $\vec{u}(-2; -6)$. Voir figure ci-dessous.
2. On obtient la figure suivante



Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points :

$$A(12 ; -10), \quad B(-8 ; 5), \quad E(-3 ; -7) \quad \text{et} \quad U(17 ; -22).$$

Le quadrilatère $BEAU$ est-il un parallélogramme ? Justifier en calculant les coordonnées de deux vecteurs.

Réponse 7

Dans un repère muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a

$$\overrightarrow{BE} = (x_E - x_B) \vec{i} + (y_E - y_B) \vec{j} = 5 \vec{i} + (-12) \vec{j}$$

et

$$\overrightarrow{AU} = (x_U - x_A) \vec{i} + (y_U - y_A) \vec{j} = 5 \vec{i} + (-12) \vec{j}$$

On a donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AU}$ et le quadrilatère $BEAU$ est un parallélogramme.

Exercice 8

Soient M, N, P et O des points du plan. Simplifier le plus possible les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}, \quad \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MP}, \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NO}, \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{PN}.$$

Réponse 8

Rappelons que si A, B et C sont trois points du plan alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

En utilisant ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} &= \overrightarrow{MO}, \\
 \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{OP}, \\
 \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NO} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP} \\
 &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} \\
 &= \overrightarrow{MP}, \\
 \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NP} \\
 &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} \\
 &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} \\
 &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\
 &= \overrightarrow{MM} \\
 &= \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Exercice 9

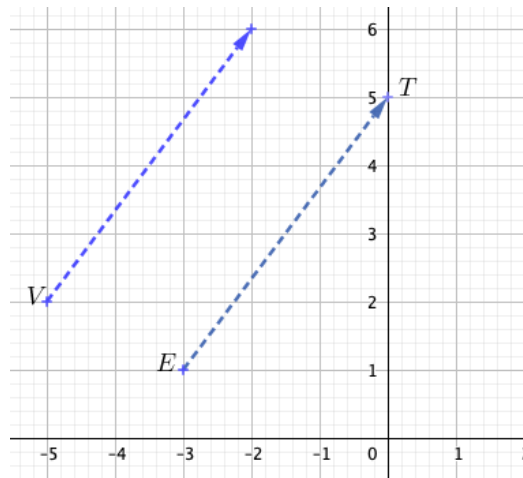
Le plan étant muni d'un repère, on donne les points :

$$V(-5 ; 2), \quad E(-3 ; 1) \quad \text{et} \quad T(0 ; 5).$$

Déterminer les coordonnées du point R tel que $VERT$ soit un parallélogramme.

Réponse 9

Voici la figure qui correspond à l'énoncé :



Soient x et y respectivement l'abscisse et l'ordonnée de R . Pour que le quadrilatère $VERT$ soit un parallélogramme il faut et il suffit que l'on ait $\overrightarrow{VR} = \overrightarrow{ET}$. Ce qui se traduit en termes de coordonnées par

$$\begin{cases} x - x_V = x_T - x_E \\ y - y_V = y_T - y_E \end{cases} \quad \text{Ou encore en remplaçant, par} \quad \begin{cases} x + 5 = 0 + 3 \\ y - 2 = 5 - 1 \end{cases}$$

Et en simplifiant, on obtient

$$\begin{cases} x + 5 = 3 \\ y - 2 = 4 \end{cases} \quad \text{C'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 6. \end{cases}$$

Les coordonnées de R sont donc $(-2; 6)$.
