

Produit scalaire de vecteurs

1 Produit scalaire de vecteurs, norme d'un vecteur

À partir de maintenant, nous supposons qu'une unité de longueur a été choisie.

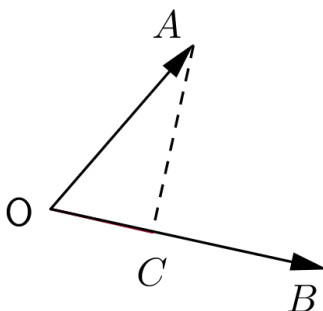
Avant de définir le produit scalaire de deux vecteurs, rappelons la définition de la mesure algébrique d'un vecteur.

Soit $\vec{i}$ un vecteur dans le plan. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{i}$ et soient A et B deux points de $\mathcal{D}$. Il existe donc un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \vec{i}$.

Définition 1 Ce nombre réel est appelé mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ (relativement à $\vec{i}$).

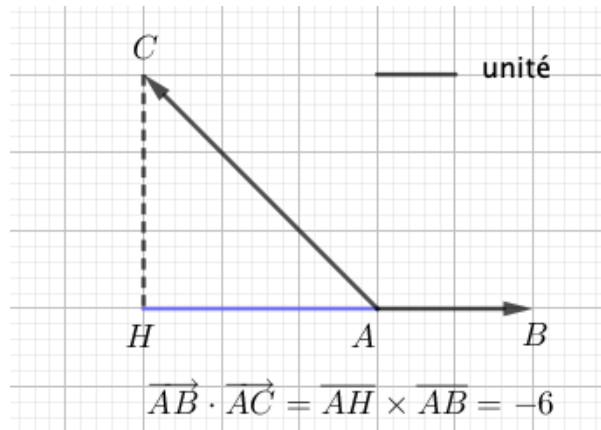
Nous allons maintenant définir le produit scalaire de deux vecteurs.

Soit O un point fixé de l'espace. Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls. Soient les points A et B tels que : $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$. Soit C le projeté orthogonal de A sur la droite (OB) et désignons par $\overline{OC}$ et $\overline{OB}$ les mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$ (relativement à un vecteur directeur de la droite (OB)).



Définition 2 Le produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le nombre (scalaire) donné par : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{OC} \cdot \overline{OB}$.

Exemple



Rappelons la définition de la norme d'un vecteur du plan.

Définition 3 (Norme d'un vecteur) Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. On appelle norme de $\vec{v}$ la longueur de n'importe lequel des segments orientés qui le représentent.

Notation

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Sa norme est notée $\|\vec{v}\|$.

Remarques

1. Le seul vecteur de longueur 0 est le vecteur nul ($\vec{0}$).
2. Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. S'il est représentée par $\overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{v}\|$ est la distance entre A et B.

Désignons par θ l'angle défini par les demi-droites OA et OB et appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ (dans le sens direct). On a alors la caractérisation suivante du produit scalaire.

Proposition

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls du plan. On a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos \theta.$$

Remarques

1. Le nombre θ défini ci-dessus est indépendant des représentants choisis.

2. On convient que le produit scalaire est nul si l'un des vecteurs est nul.

3. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

4. Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. On a :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2.$$

Exemple d'utilisation du produit scalaire

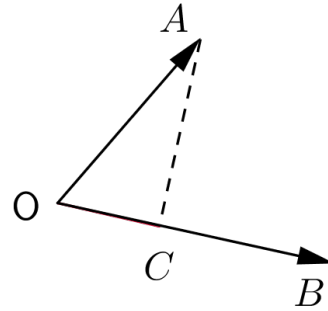
Le produit scalaire est utilisé en mécanique pour évaluer le travail d'une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace, sur une droite, de A en A' : le travail est donné par $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AA'}$.

Projection scalaire

Complétons les définitions précédentes par celle de la projection scalaire qui permet de calculer, par exemple, rapidement certaines distances.

Dans la figure ci-contre, le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est le vecteur projection de $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$. Sa mesure algébrique $OC = \vec{V} \cos \theta$ (où θ est l'angle (OA, OB)) est appelée projection scalaire de $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$. Elle est notée parfois $\text{prop}_{\vec{V}} \vec{U}$ et vérifie donc

$$\text{prop}_{\vec{V}} \vec{U} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{\|\vec{V}\|}.$$



Propriétés du produit scalaire - Règles de calcul 3

On a les propriétés suivantes : quels que soient les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ et le nombre réel λ ,

$$\text{a) } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1, \quad (1)$$

$$\text{b) } \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3, \quad (2)$$

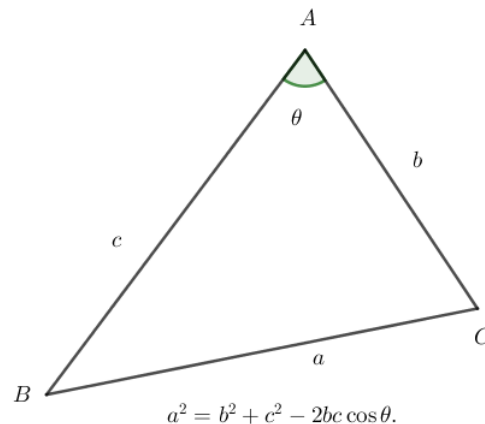
$$\text{c) } \lambda (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (\lambda \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (\lambda \vec{V}_2). \quad (3)$$

En utilisant les propriétés précédentes, on pourra retrouver le théorème relatif aux mesures des côtés d'un triangle ⁽¹⁾.

Proposition -Théorème d'El-Kashi

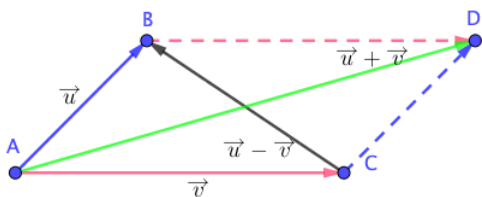
Soit ABC un triangle de côtés ayant pour longueur respectivement $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit θ la mesure de l'angle BAC . On a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta.$$



La proposition qui suit permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs en fonction des longueurs des diagonales du parallélogramme construit sur des représentants de ces vecteurs. Sa démonstration utilise les règles de calcul ci-dessus.

(1). Théorème dit des cosinus ou d'El-Kashi et qui est une généralisation du fameux théorème d'Euclide.



Proposition - Produit scalaire et diagonale du parallélogramme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a les égalités

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right),$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right).$$

Proposition - Orthogonalité

Deux vecteurs du plan sont *orthogonaux* si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

On remarquera que $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{V}$.

Avec ces notions, on peut donner une nouvelle définition d'un repère orthonormé.

Définition 4 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$ et O un point du plan. On dira que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme égale à 1.

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est *orthonormé* signifie que

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1. \quad (4)$$

2 Vecteurs dans un plan muni d'un repère orthonormé

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé dans le plan.

Ci-dessous quelques propriétés fondamentales.

Propriété 1 (Coordonnées et produit scalaire).

Soit un vecteur $\vec{V}$ de $\mathcal{V}$. La décomposition de $\vec{V}$ s'obtient facilement en utilisant le produit scalaire. On a, si $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$ alors

$$x = \vec{V} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad y = \vec{V} \cdot \vec{j} \quad (5)$$

Propriété 2 (Expression analytique du produit scalaire et de la norme).

Soit $\vec{V}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dans $\mathcal{V}$. On a alors :

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|\vec{V}\|^2 = x^2 + y^2. \quad (6)$$

En particulier, dans un plan muni d'un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{V}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$.